HOJA DE EJERCICIOS 7
Análisis Matemático (Grupo 130)
CURSO 2021–2022.

Problema 1. Explica por qué el conjunto

$$X \;=\; \left\{\, (x,y,z,u,v) \in \mathbb{R}^5 \,:\, 3x^2 + 5y^7 + v^2 - e^{uz} = 0 \,\right\} ,$$

es una subvariedad de $\mathbb{R}^5$. Dí, razonadamente, cuál es la dimensión geométrica de X.

Problema 2. Consideramos los dos cilindros siguientes en $\mathbb{R}^3$

$$C_1 \;=\; \left\{\, (x,y,z) \,:\, x^2 + y^2 = 1 \,\right\} \quad , \quad C_2 \;=\; \left\{\, (x,y,z) \,:\, y^2 - 2y + z^2 = 0 \,\right\} .$$

Demuestra que la intersección $C_1 \cap C_2$ es un subvariedad de $\mathbb{R}^3$. Dí, razonadamente, cuál es la dimensión geométrica de esta intersección.

Problema 3. Demuestra que el siguiente conjunto es una subvariedad de $\mathbb{R}^4$, determinando su dimensión geométrica

$$X \;=\; \left\{ (x,y,z,u) \,:\, \begin{array}{rcl} x^2 + \cos x + e^z & = & 3 \\ u^2 + y^5 & = & 1 \end{array} \right\} .$$

Problema 4. Consideramos la función $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida como sigue:

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4) \;=\; \begin{pmatrix} x_2 \cos x_1 + x_3^2 + 7x_2x_4 \\ \\ e^{x_1}x_3 + 5e^{x_2} - \operatorname{sen} x_3 - x_1x_4^2 \end{pmatrix} ,$$

y los puntos $a = (0,1,0,0)$ y $a' = (0,0,0,1)$.
a) Queremos resolver el sistema de dos ecuaciones $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = F(a)$ cerca del punto a. Determina qué dos variables, entre las x_1,x_2,x_3,x_4, se puede asegurar que se despejan como funciones diferenciables de las otras dos.
b) Misma pregunta para el punto a'.

Problema 5. ¿Es la unión de dos subvariedades siempre una subvariedad? ¿puede serlo alguna vez? Examina estas preguntas mediante ejemplos en el plano.

Problema 6. Comprueba que las siguientes son subvariedades de $\mathbb{R}^3$

$$X \;=\; \left\{\, (x,y,z) \,:\, z = xy \,\right\} \quad , \quad Y \;=\; \left\{\, (x,y,z) \,:\, z = 0 \,\right\} .$$

¿Es $X \cap Y$ una subvariedad? Razona tu respuesta.

Problema 7. ¿Es necesario que un camino $\alpha(t) : I \to \mathbb{R}^N$ sea inyectivo para que su imagen sea una subvariedad? Examina el caso de $\alpha(t) \equiv (\cos t, \operatorname{sen} t)$ con $I = \mathbb{R}$.
