HOJA DE EJERCICIOS 6
Análisis Matemático (Grupo 130)
CURSO 2021–2022.

Problema 1. Consideramos la función $f(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dada por la siguiente fórmula:

$$f(x,y)\ \equiv\ \begin{pmatrix} x+e^x \\ y^2+\operatorname{sen}(x-1)\end{pmatrix}.$$

(a) Demuestra que existe una inversa local $g\equiv(g_1,g_2)$ de f tal que el dominio de g es un abierto $V\ni(1+e,1)$ y $g(1+e,1)=(1,1)$.

(b) Demuestra que en el abierto V se verifica la siguiente identidad:

$$Dg\ \equiv\ \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+e^{g_1}} & 0 \\ \dfrac{-\cos(g_1-1)}{2g_2\cdot(1+e^{g_1})} & \dfrac{1}{2g_2}\end{bmatrix}.$$

(c) Derivando esa identidad, obtén identidades:

$$g_{2xx}\ \equiv\ \text{fórmula}_1\,(g_1,g_2)\ , \tag{1}$$
$$g_{2xy}\ \equiv\ \text{fórmula}_2\,(g_1,g_2)\ , \tag{2}$$
$$g_{2yx}\ \equiv\ \text{fórmula}_3\,(g_1,g_2)\ , \tag{3}$$
$$g_{2yy}\ \equiv\ \text{fórmula}_4\,(g_1,g_2)\ , \tag{4}$$

entre las derivadas segundas de g_2 y expresiones concretas en g_1 y g_2. Comprueba que (2) y (3) dan el mismo resultado, aunque se llega a ellas por caminos diferentes.

(d) Calcula explícitamente la matriz hessiana de g_2 en el punto $(1+e,1)$.

(e) Repite el proceso con g_1.

Problema 2. **(a)** Prueba que la ecuación

$$x\,y\ =\ \log\frac{x}{y}$$

admite una única solución $y=f(x)$ definida en un entorno de $a=\sqrt{e}$ y verificando $f(\sqrt{e})=1/\sqrt{e}$.
(b) Calcula explícitamente los números $f'(a)$ y $f''(a)$.

Problema 3. Dibuja los abiertos

$$U_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ 1<x^2+y^2<4\ ,\ y>-\frac{1}{2}\,|x|\right\},\qquad U_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ 1<x^2+y^2<4\ ,\ y<\frac{1}{2}\,|x|\right\}.$$

Halla una inversa del cambio a polares definida en U_1 y otra definida en U_2. Demuestra que, sin embargo, no hay ninguna inversa local continua en $U_1\cup U_2$.
Indicación: halla todas las inversas en U_1 y todas las inversas en U_2, y comprueba que no se las puede casar.

Problema 4. Sea

$$\begin{cases} u(x,y)=x^2-4\,y^2 \\ v(x,y)=4\,x\,y\end{cases}$$

a) Demuestra que la aplicación $(x,y)\mapsto(u,v)$ es localmente invertible en todo punto distinto del origen.

b) Calcula la matriz de la diferencial de la función inversa de $f(x,y)=\big(u(x,y),v(x,y)\big)$ en $x=1/2\,,\ y=1$.

c) Prueba que en ningún disco abierto conteniendo al origen existe una inversa de f, ni siquiera una no diferenciable.
Indicación: estudia la inyectividad.

Problema 5. Demuestra que existe una única función $f : U \to \mathbb{R}$, de clase $\mathcal{C}^1$ en un entorno U de $(0,0)$, tal que

$$f(0,0) \;=\; 0 \qquad \text{y} \qquad e^{f(x,y)} \;\equiv\; \big(1 + x\, e^{f(x,y)}\big)\,\big(1 + y\, e^{f(x,y)}\big)\;.$$

Calcula explícitamente $\nabla f(0,0)$.

Problema 6. Demuestra que la ecuación

$$\cos x - y^3 \;=\; 0\;,$$

define una única función implícita $y(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y dibuja el grafo $\{y = y(x)\}$. Esta $y(x)$ es función $\mathcal{C}^\infty$ de x en un entorno de $x_0 = 0$ (ahí se cumple la condición del teorema de las funciones implícitas), pero encuentra valores de x, alejados del valor $x = 0$, en los que $y(x)$ ni siquiera es diferenciable.

Problema 7. Dada $f \in C^1(\mathbb{R})$, definimos una función vectorial $F(x,y) \equiv \big(u(x,y), v(x,y)\big)$ por las siguientes identidades:

$$\begin{cases} u(x,y) \;\equiv\; f(x) \\ v(x,y) \;\equiv\; -\,y + x\, f(x) \end{cases}$$

Demuestra que si f' no se anula entonces F tiene una inversa **global** (es decir, F es biyectiva de $\mathbb{R}^2$ a un abierto $V \subseteq \mathbb{R}^2$, por lo cual existe $F^{-1} : V \to \mathbb{R}^2$).
Si además $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$, halla explícitamente las derivadas parciales de F^{-1} en el origen.

Problema 8. Dada $f \in C^1(\mathbb{R})$ y $\varepsilon > 0$, definimos

$$F_\varepsilon(x,y) \;=\; \big(-\,y + \varepsilon f(x), x + \varepsilon f(y)\big)\;.$$

Fijado $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ demuestra que, para ε suficientemente reducido, existe un $r > 0$ tal que en el disco $B\big((x_0,y_0), r\big)$ la función F_ε es invertible con inversa C^1.

Problema 9. Estudia si es posible despejar $u(x,y,z)$ y $v(x,y,z)$ en las ecuaciones

$$\begin{cases} x\,y^2 + x\,z\,u + y\,v^2 = 3 \\ x\,y\,u^3 + 2\,x\,v - u^2\,v^2 = 2 \end{cases}$$

en un entorno de $(x,y,z) = (1,1,1)$ y $(u,v) = (1,1)$. En caso afirmativo, calcula $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial x$ y $\partial v/\partial z$ en el punto $(x,y,z) = (1,1,1)$.

Problema 10.

> Decimos que una aplicación f es **cerrada** si la imagen directa por f de cualquier cerrado es un cerrado.

a) Demuestra que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es coerciva y continua entonces es cerrada.
b) Demuestra que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$ es abierta pero no cerrada.
c) Demuestra que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ es cerrada. ¿Es f abierta?
