HOJA DE EJERCICIOS 5 (Grupo 130)
Análisis Matemático.
CURSO 2021–2022.

Problema 1. Para cada aplicación $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ y el correspondiente conjunto E que se dan, demuestra que hay un único punto $a\in E$ tal que $f(a)=a$. Describe un procedimiento para calcular a con dos decimales de precisión.

(a) $f(x,y)=\left(\frac{1}{3}\operatorname{sen}x-\frac{1}{3}\cos y+2\ ,\ \frac{1}{6}\cos x+\frac{1}{2}\operatorname{sen}y-1\right)$, $E=\{|x-2|\le 1, |y+1|\le 1\}$.

(b) $f(x,y)=\left(\frac{xe^y}{40}\ ,\ 1+\frac{x^2+2\cos y}{10}\right)$, $E=\{|x|,|y-1|\le 1\}$.

(e) $f(x,y)=\left(\frac{e^{x/3}}{4}+\frac{y^2}{10}\ ,\ \frac{1}{5}+\frac{x^2y}{10}\right)$, $E=\{|x|,|y|\le 1\}$.

Problema 2. Sea $A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ la aplicación lineal dada por la matriz

$$A=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}5&6\\4&3\end{pmatrix}.$$

Demuestra que A es contractiva de $(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_1)$ en $(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_1)$ pero no lo es de $(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_\infty)$ en $(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_\infty)$.

Problema 3. En este ejercicio exploramos lo que pasa al debilitar alguna hipótesis del teorema de la aplicación contractiva.

a) (Espacio compacto, $K=1$). Sea $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$ la circunferencia unidad. Da un ejemplo de una $f:C\to C$ sin punto fijo, pero que cumpla $\|f(p)-f(q)\|=\|p-q\|$ para cualesquiera $p,q\in C$.

b) (Espacio no completo). Da un ejemplo de una $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$ contractiva pero sin punto fijo.

Problema 4. Vamos a hacer uso del siguiente resultado, donde tanto las normas involucradas como las bolas son las euclídeas estándar.

> *Sean un abierto de $U\subseteq\mathbb{R}^n$, un punto $a\in U$ y $f:U\to\mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^1$. Supongamos que existen dos números $r,\lambda>0$ y una matriz* **ortogonal** P *tales que*
>
> $$\text{para todo } x\in\overline{B}(a,r) \text{ y todo } v\in\mathbb{R}^n \text{ se tiene } v^t\big(P\,Df(x)\big)\,v\ \ge\ \lambda\|v\|^2\,.$$
>
> *Entonces f es inyectiva en $B(a,r)$ y $f\big(B(a,r)\big)\supset B\big(f(a)\,,\,\lambda\,r\big)$.*

Se pide dar un radio r de inyectividad alrededor de a y una bola centrada en $f(a)$ en la que esté definida la inversa local con $f(a)\mapsto a$, para cada una de las funciones $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ y puntos $a\in\mathbb{R}^2$ siguientes:

Indicación: acuérdate de aprovechar la desigualdad $v_1v_2\ge-(v_1^2+v_2^2)/2$.

a) $a=(4,2)$ y $f(x,y)=\begin{pmatrix}xy+e^{y/10}\\ 5x-\frac{y^2}{2}\end{pmatrix}$. *Sugerencia:* $P=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$.

b) $a=(1,1)$ y $f(x,y)=\begin{pmatrix}x^3+\frac{\operatorname{sen}y}{6}\\ \frac{x}{10}-e^y\end{pmatrix}$. *Sugerencia:* $P=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$.

c) $a=(0,1)$ y $f(x,y)=\begin{pmatrix}5\,e^y\,x+\cos y\\ x+y^4\end{pmatrix}$. *Sugerencia:* $P=I_2$.

Problema 5.

> Se llama **inversa local** de una función f a la inversa $\big(f|_U\big)^{-1}:f(U)\to\mathbb{R}^n$ de cualquier restricción suya a un abierto $f|_U$ que sea inyectiva.

Elige una inversa local del cambio a polares $x(r,\theta)=r\cos\theta$, $y(r,\theta)=r\operatorname{sen}\theta$, definida alrededor del punto $x=2$, $y=-2\sqrt{3}$. Calcula la matriz jacobiana en este punto de la inversa local elegida.

Problema 6. Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$ y tal que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Demuestra que f es inyectiva, no importa lo largo que sea el intervalo I.

Problema 7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$. Supongamos que existe una constante $c > 0$ tal que $|f'(x)| \geq c$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demuestra que f es biyectiva.

Problema 8. (a) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^1$, Si hay $c > 0$ y una matriz ortogonal P tales que

$$v^t \big(P\, Df(x) \big)\, v \;\geq\; c\, \|v\|^2 \quad \text{para cualesquiera } x, v \in \mathbb{R}^n \,,$$

demuestra que f es biyectiva.

(b) Halla una matriz $A_{2\times 2}$ que cumpla $\|Av\| \geq \|v\|$, pero que no cumpla $v^t A v \geq c\|v\|^2$ para ninguna constante $c > 0$.

Problema 9. Un **polinomio complejo** es una función $f(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$\mathbb{C} \ni z \;\longmapsto\; f(z) \;\equiv\; a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \,,$$

donde $a_0, \ldots, a_n$ son números complejos constantes.
Se sabe que si $f(z)$ es un polinomio complejo *no constante* y $U \subseteq \mathbb{C}$ es cualquier abierto, entonces $f(U)$ también es un abierto. Deduce de esto que una tal función es suprayectiva (teorema fundamental del Álgebra).

Indicación: demuestra que si una sucesión $\{z_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ es tal que $\big\{ f(z_j) \big\}_{j=1}^{\infty}$ es acotada, entonces $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ ya era acotada para empezar.

Problema 10. Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una aplicación que cumple lo siguiente:

$$x, y \in X \ \text{ y } \ x \neq y \implies d\big(f(x) \,,\, f(y) \big) \;<\; d(x, y) \,.$$

1. Demuestra que f es continua.
2. Demuestra que f tiene un punto fijo $p \in X$ y que tal punto es único.
   Indicación: considera la función $X \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto d\big(x \,,\, f(x) \big)$.
   ¿Es esto también verdad para (X, d) no compacto?
3. Demuestra que f no es suprayectiva.
   Indicación: considera la función $X \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto d(x, p)$, siendo p el punto fijo.

Problema 11. Estudia alrededor de qué puntos tienen inversa diferenciable los cambios a cilíndricas y esféricas:

$$\begin{cases} x(r,\varphi,h) &= r\cos\varphi \\ y(r,\varphi,h) &= r\operatorname{sen}\varphi \\ z(r,\varphi,h) &= h, \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x(r,\theta,\phi) &= r\cos\theta\operatorname{sen}\phi \\ y(r,\theta,\phi) &= r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi \\ z(r,\theta,\phi) &= r\cos\phi. \end{cases}$$
