HOJA DE EJERCICIOS 4 (Grupo 130)
Análisis Matemático.
CURSO 2021–2022.

Problema 1. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto *convexo* y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1. Demuestra que si

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\, \xi_i\, \xi_j > 0 \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n \quad \text{y todo } \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

entonces f es inyectiva.
Indicación: Fijados $x, y \in U$, estudia la función

$$g(t) = \Big\langle f\big(tx + (1-t)y\big)\,,\ x - y \Big\rangle\ ,\quad t \in [0,1]\ .$$

Problema 2. a) Demuestra que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es positivamente homogénea de grado $0 < p < 1$, con $f(\mathbf{0}) = 0$ pero no idénticamente nula, entonces f no es diferenciable en $\mathbf{0}$.

b) Demuestra que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es positivamente homogénea de grado 1 y diferenciable en $\mathbf{0}$ entonces es lineal.

¿Hay alguna norma que sea diferenciable en todo $\mathbb{R}^n$?

Problema 3. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 y sea A una matriz $n \times n$. Se define $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como $g(x) = f(Ax)$. Calcula la matriz hessiana de g.
Sugerencia: hazlo primero para $n = 2$.

Problema 4. Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ en un abierto U de $\mathbb{R}^3$, con $a = (3, 2, -1) \in U$.
Se sabe que:

$$f(a) = 6 \quad , \quad Df_a = [0\ 0\ 0] \quad , \quad \operatorname{Hess}(f)_a = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} .$$

(a) Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 de f en a.
(b) Dí, razonadamente, si a es máximo local de f, mínimo local de f o ninguna de las dos cosas.

Problema 5. Calcula el polinomio de Taylor de orden 3 de f, en el punto indicado, utilizando oes de Landau en vez de hallar las derivadas parciales:
(a) $f(x,y) = \dfrac{e^{y^2}}{x}$ en el punto $(1,0)$.
(b) $f(x,y) = \operatorname{sen} \dfrac{x}{1-y^2}$ en el punto $(0,0)$.

Problema 6. Considera el abierto $U = \{(x,y) : x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ y en él la función

$$f(x,y) = \frac{1}{x} + x^2 + y^2\ .$$

a) Dibuja el siguiente conjunto y demuestra que es compacto:

$$K = \left\{ (x,y) : x \geq \frac{1}{2}\,,\ \|(x,y)\|_2 \leq 2 \right\} \subset U\ .$$

b) Demuestra que para todo $(x,y) \in U \setminus K$ se tiene $f(x,y) > f(1,0)$.

Indicación: observa que si $(x,y) \in U \setminus K$ entonces o bien $x < 1/2$ o bien $\|(x,y)\|_2 > 2$.

c) Demuestra que el valor mínimo de f en K es también el mínimo de f en U. Calcula explícitamente dicho valor mínimo.

Problema 7. Considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) \;=\; e^{3x}\left(\frac{x}{2} - x^2 - y^2\right) .$$

a) Halla los puntos críticos de f y comprueba que uno de ellos es un máximo local.

b) Poniendo $r = \|(x,y)\|_2$, demuestra que $f(x,y) \le e^{3x}\left(\frac{r}{2} - r^2\right)$. Concluye que $f(x,y) < 0$ para $r > \frac{1}{2}$.

c) Demuestra que f alcanza su valor máximo en $\mathbb{R}^2$ y halla dicho valor explícitamente.

d) ¿Tiene f un ínfimo finito en $\mathbb{R}^2$?

Problema 8. Considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) \;=\; e^{3x^3-4x}\,(1+y^2) .$$

a) Halla los puntos críticos de f. Comprueba que uno de ellos es mínimo local.

b) Demuestra que f tiene un ínfimo finito en $\mathbb{R}^2$. ¿Coincide este valor ínfimo con el valor en el punto de mínimo local?

c) ¿Tiene f un supremo finito en $\mathbb{R}^2$?

Problema 9. Comprueba que la siguiente función sólo tiene sillas:

$$f(x,y) \;=\; x + xy^2 + x^2y .$$

Problema 10. Comprueba que la siguiente función sólo tiene mínimos locales (más de uno):

$$f(x,y) \;=\; (x^2-1)^2 + (e^y - x^2)^2 .$$

¿Son mínimos globales?
