

HOJA DE EJERCICIOS 1
Análisis Matemático.
CURSO 2021-2022.

Problema 1. Denotamos por $\|x\|$ la norma euclídea asociada al producto escalar en \mathbb{R}^N ,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^N x_i y_i.$$

Prueba las dos identidades siguientes, y da una interpretación geométrica:

- 1) *Identidad del Paralelogramo:* $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$.
 - 2) *Identidad de Polarización:* $4\langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2$.
-

Problema 2. Considera la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}.$$

El determinante 1×1 formado por la esquina superior izquierda es positivo. El determinante 1×1 formado por la esquina inferior derecha es positivo. El determinante 2×2 es positivo.

Comprueba que, sin embargo, existen vectores $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ tales que $\mathbf{v}^t A \mathbf{v} < 0$.

¿Contradice esto al criterio de Sylvester?

Problema 3. Sea E un espacio vectorial real dotado de una norma $\|\cdot\|$ que satisface la *Identidad del paralelogramo* (ver ej.1). Definimos

$$B(x, y) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

Demuestra que $B(\cdot, \cdot)$ es un producto escalar en E .

Problema 4. Dadas las funciones definidas en \mathbb{R}^2 :

$$A(x, y) = \max\{2|x|, \sqrt{x^2 + y^2}\},$$

$$B(x, y) = \max\{|y|, |x - y|\},$$

- a) Demuestra que son normas en \mathbb{R}^2 .
 - b) Dibuja la bola unidad en cada una de ellas.
 - c) Comprueba que para $A(x, y)$ la desigualdad triangular puede ser una igualdad, incluso para vectores linealmente independientes.
-

Problema 5. a) Comprueba que $d(x, y) = \min\{1, |x - y|\}$ define una distancia en \mathbb{R} , y que los abiertos asociados a d son los mismos que los asociados a la distancia usual $|\cdot|$.

b) Demuestra que la distancia d anterior no tiene asociada ninguna norma.

c) Sea E un espacio vectorial sobre \mathbb{R} sobre el que está definida una distancia d . Demuestra que son equivalentes:

- Existe una norma $\|\cdot\|$ en E tal que $d(x, y) = \|x - y\|$.
- La función d satisface:

$$\begin{cases} d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y), \\ d(x + z, y + z) = d(x, y) \end{cases}$$

d) Repite los apartados a) y b) con la función $D : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$D(x, y) = |x - y| + \left| |x| - |y| \right|.$$

Problema 6. (Este ejemplo se suele conocer por *French railway metric*. Dada la estructura de su red de ferrocarriles, los franceses suelen bromear diciendo que la mejor manera de ir de la ciudad A a la ciudad B es siempre pasar por París y hacer transbordo. La métrica siguiente reproduce esta idea.)

Definimos en \mathbb{R}^2 :

$$d(x, y) = \|x - y\|_2, \text{ si } y = tx \text{ para algún } t > 0,$$

$$d(x, y) = \|x\|_2 + \|y\|_2, \text{ en cualquier otro caso.}$$

a) Comprobar que d es una métrica en \mathbb{R}^2 .

b) Representar gráficamente la bola $B(x, r)$ asociada a esa métrica, para cada $x \in \mathbb{R}^2$ y para cada $r > 0$.

Problema 7. Sea $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de puntos en \mathbb{R}^N tal que para todo k ,

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq r \|x_k - x_{k-1}\|,$$

para algún $r \in (0, 1)$. Demuestra que $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es convergente.

Problema 8. Consideramos en \mathbb{R}^n la norma

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

donde $1 \leq p < +\infty$.

a) Dados $1 \leq p < q < +\infty$, demuestra que si $\|x\|_p \leq 1$ entonces $\|x\|_q \leq 1$.

b) Demuestra que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se verifica $\|x\|_q \leq \|x\|_p$.

c) Sea $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, 2, \dots, n\}$. Demuestra que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se satisface:

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$$

Indicaciones. Dividiendo por la norma infinito en los dos miembros, podemos asumir que $\|x\|_\infty = 1$. Separa las componentes con $|x_i| = 1$ de las componentes con $|x_i| < 1$. Usa (después de demostrarla) la desigualdad $|a^\alpha - b^\alpha| \leq |a - b|^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $0 < a, b \in \mathbb{R}$.

Problema 9. Sea $D : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ cumpliendo las dos condiciones siguientes:

$$D(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad , \quad D(x, y) \leq D(z, x) + D(z, y) \quad \text{para cualesquiera } x, y, z.$$

Demuestra que D es una distancia en X .

Problema 10. Sea \bar{A} el cierre de un conjunto (es decir, la unión de A con sus puntos de acumulación). Demuestra las siguientes propiedades:

1) $x \in \bar{A} \iff$ para todo entorno abierto V_x del punto x , se tiene $V_x \cap A \neq \emptyset$.

2) Si $A \subset B$ entonces $\bar{A} \subset \bar{B}$.

3) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Problema 11. Discutir cuáles de los siguientes conjuntos son abiertos o cerrados:

1) $\bigcap_{k=1}^{\infty} \left[-1, \frac{1}{k}\right)$ en \mathbb{R} .

2) $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$ en \mathbb{R} .

3) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq y\}$ en \mathbb{R}^2 .

4) $H = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x_1 = 0\}$ en \mathbb{R}^N .

5) $\{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| = 1\}$ en \mathbb{R}^N .

6) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ en \mathbb{R} .

Determinar el interior, la frontera, los puntos de acumulación y la clausura (el cierre) de cada uno de los conjuntos anteriores.

Problema 12. Sea (X, d) un espacio métrico. Demuestra las propiedades siguientes, válidas para cualesquiera $a, b, c \in X$, y $r, s > 0$:

a) $|d(a, b) - d(b, c)| \leq d(a, c)$.

b) Si $a, b \in B(c, r)$, entonces $d(a, b) < 2r$.

c) Si $B(a, r) \cap B(b, s) \neq \emptyset$, entonces $d(a, b) < r + s$.

Problema 13. Sean $x \in \mathbb{R}^N$ y $A \subset \mathbb{R}^N$. Se define la **distancia de x a A** por

$$d(x, A) = \inf\{\|x - y\| : y \in A\}.$$

a) Demuestra que para todos $x, y \in \mathbb{R}^N$ se cumple

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|$$

b) Sea $A_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^N \mid d(x, A) < \epsilon\}$. Prueba que A_ϵ es abierto.

c) Si se define $A^\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^N \mid d(x, A) \leq \epsilon\}$, prueba que es cerrado.

d) Prueba que A es cerrado si y sólo si $A = \bigcap_{\epsilon > 0} A^\epsilon$.

Problema 14. Sea $A \subset \mathbb{R}^N$ un subconjunto infinito. Demuestra que A es compacto si y sólo si cualquier subconjunto infinito de A tiene algún punto de acumulación que pertenece a A .

Problema 15. Discutir cuáles de los siguientes conjuntos son compactos

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\}, \quad C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \geq 1\}$$

Problema 16. Sea $S^{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| = 1\}$. Sea $f : S^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Estudiar si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:

1) $f(S^{N-1})$ es acotado.

2) $f(S^{N-1})$ es un abierto.

Si además se sabe que $f(S^{N-1}) \subset \mathbb{Q}$, estudiar qué se puede decir de f .

Problema 17. Demuestra que toda transformación lineal $T : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ es continua.

Problema 18. Dada una transformación lineal entre dos espacios métricos $T : X \rightarrow Y$, definimos su norma

$$\|T\| = \max_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y.$$

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Halla sus normas como operadores lineales en los siguientes casos:

a) $A : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$.

b) $B : (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$.

c) $B : (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_1) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$.

d) $B : (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_1) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$.

e) $B : (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.

Ejercicio optativo adicional: conjeturar la fórmula que debe obtenerse para una matriz genérica de dimensión $N \times M$ en los casos d) y e) anteriores.

Problema 19. Sea $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq M}}$ una matriz $N \times M$.

Interpretando $A : (\mathbb{R}^M, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_2)$, demuestra que $\|A\| = \sqrt{\lambda^*}$, donde λ^* es el mayor de los autovalores de $A^T A$.

Indicación: la matriz $A^T A$ es simétrica, y por lo tanto diagonalizable en la base adecuada.

Problema 20. (Atención: es muy instructivo comparar este ejercicio con el anterior. NO es lo mismo.) Consideramos las matrices

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 2 \end{pmatrix},$$

como operadores $A : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$.

a) Demuestra que $\|A(a)\| \geq \sqrt{1+a^2}$.

b) Calcula los autovalores de $A(a)$. Demuestra que no se puede estimar la norma $\|A(a)\|$ a partir de los autovalores obtenidos.

c) Usa el resultado del ejercicio anterior para calcular el valor exacto de $\|A(a)\|$.