HOJA DE EJERCICIOS 11
Análisis Matemático. (Grupo 130)
CURSO 2021-2022.

Problema 1. Consideramos las siguientes formas diferenciales en $\mathbb{R}^3$:

$$\omega \ = \ dx - zdy \quad , \quad \nu \ = \ (x^2+y^2+z^2)dx\wedge dz + (xyz)dy\wedge dz.$$

Calcular

$$d\omega \ , \ \omega\wedge d\omega \ , \ d\nu \ , \ \omega\wedge\nu \ .$$

Problema 2. Calcular los siguientes productos exteriores:

a) $(dx+dy-dz)\wedge(dx+dy+dz)$.

b) $(xdx+ydy+zdz)\wedge(xdy+ydz+zdx)$.

c) $(dx+7dy)\wedge(-dx+x^2dy+dz)\wedge(dy+dz)$.

Problema 3. Demuestra la siguiente identidad:

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} F_j dx_j\Big)\wedge\Big(\sum_{j=1}^{n} G_j dx_j\Big) \ = \ \sum_{1\le j<k\le n}(F_jG_k - F_kG_j)\,dx_j\wedge dx_k.$$

Problema 4. Halla la diferencial exterior de las siguientes formas

1. $(x^2+y+z^2)\,dx\wedge dz + xyz\,dy\wedge dz - \operatorname{sen}(yz)\,dx\wedge dy$,
2. $x_3\,dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4 - x_2\,dx_1\wedge dx_3\wedge dx_4 + x_3\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_4 - x_4\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$.

Problema 5. Decimos que una 2-forma ω es **exacta** si existe una 1-forma α tal que $d\alpha=\omega$. Para cada una de las siguientes 2-formas, comprueba si es exacta.

$$\begin{aligned}&du\wedge dv\ ,\\ &(x^2+xy+y^2)dx\wedge dy\ ,\\ &xdy\wedge dz + ydz\wedge dx - 2zdx\wedge dy\ .\end{aligned}$$

Problema 6. Comprueba directamente que $\phi^*d\omega = d(\phi^*\omega)$:

$$\phi(u,v)\ \equiv\ \big(e^u\,,\,u^3v\,,\,u\operatorname{sen}v\big)\quad,\quad \omega\ =\ z\,dx\wedge dy + xy\,dz\wedge dx + (y-z)\,dy\wedge dz\ .$$

Problema 7. a) Determina el valor del parámetro a para que el siguiente campo de vectores tenga divergencia constante:

$$F\ =\ (\,ax\cos^2 y\,,\,\cos y\operatorname{sen}y + ye^z\,,\,x^3-e^z\,)\ .$$

b) Para ese valor de a, sean φ_t las transformaciones de flujo de F. Demuestra que dada cualquier región $R\subset\mathbb{R}^3$ se tiene lo siguiente para todo t:

$$\text{volumen}\big(\varphi_t(R)\big)\ =\ e^{-t}\cdot\text{volumen}\,(R)\ .$$
