HOJA DE EJERCICIOS 10
Análisis Matemático. (Grupo 130)
CURSO 2021-2022.

Problema 1. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $F : U \to \mathbb{R}^n$ de clase al menos $\mathcal{C}^1$.

a) Para n cualquiera (incluyendo $n = 3$) demuestra que para todo $p \in U$ y cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$d(F^\flat)_p(a,b) \; = \; a^t \left[\, (DF)^t - DF \, \right] b \; .$$

b) en el caso $n = 3$, demuestra que para $p \in U$ y $b \in \mathbb{R}^3$ se tiene

$$\left[\, DF - (DF)^t \, \right]_p b \; = \; (\mathbf{rot}\, F)_p \times b \; ,$$

y deduce de ello que para todo $p \in U$ y cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}^3$ se tiene

$$d(F^\flat)_p(a,b) \; = \; (\mathbf{rot}\, F)_p^\natural \, (a,b) \; \stackrel{\text{def}}{=} \; \det \left[\, (\mathbf{rot}\, F)_p \mid a \mid b \, \right] \, ,$$

es decir que $d(F^\flat) = (\mathbf{rot}\, F)^\natural$.

Problema 2. Calcula el "pull-back" $f^*\omega$ para cada una de las siguientes formas ω y funciones f:

a) $f : \mathbb{R}^2_{\mathbf{u}} \to \mathbb{R}^3_{\mathbf{x}}$, $f(u_1, u_2) = (u_1^2, u_2^2, e^{u_1 u_2})$, $\omega = x_2 \, dx_1 + (x_1 - x_2 - x_3) \, dx_2 - dx_3$.

b) $f : \mathbb{R}^2_{uv} \to \mathbb{R}^3_{xyz}$, $f(u,v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, e^u)$, $\omega = (x^2 - y^2) \, dx \wedge dy - 3 \, (x^2 + y^2) \, dy \wedge dz$.

c) $f : \mathbb{R}_t \to \mathbb{R}^3_{xyz}$, $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $\omega = (x^2 + y^2 + z^2) \, dx + (x - \cos z) \, dy + (x^2 + y^2 - 1) \, dz$.

d) $f : \mathbb{R}^2_{xy} \to \mathbb{R}^2_{xy}$, $f(x,y) = \big(ax - by \, , \, bx + ay \big)$, a, b constantes, $\omega = xdy - ydx$.

e) $f : \mathbb{R}^2_{r\theta} \to \mathbb{R}^2_{xy}$, $f(r,\theta) = (r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)$, $\omega = dx \wedge dy$.

Problema 3. En cada caso, dibuja la imagen $\phi(R)$, de la región R que se indica, y calcula $\displaystyle\int_{\phi|_R} \Omega$:

a) $\phi(u,v) \equiv \big(\cos u \, , \, \operatorname{sen} u \, , \, v \big)$, $R = (0, 2\pi) \times (-1, 1)$, $\Omega = x^3 \, dz \wedge dx$.

b) $\phi(u,v) \equiv \big(\cos u \cos v \, , \, \cos u \operatorname{sen} v \, , \, \operatorname{sen} u \big)$, $R = \left(0 \, , \, \dfrac{\pi}{2} \right) \times (0, 2\pi)$, $\Omega = z \, dx \wedge dy$.

Problema 4. Sea $R \subset \mathbb{R}^2_{uv}$ una región limitada por curvas cerradas disjuntas que son las imágenes de unos caminos $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, el exterior antihorario y los demás horarios.
Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto en el que tenemos un campo de vectores $F : U \to \mathbb{R}^n$ y $\varphi(u,v) : R \to U$.
La versión para estos objetos de la fórmula de Stokes es:

$$\sum_{1 \le j \le k} \int_{\varphi \circ \alpha_j} F \cdot d\mathbf{s} \; = \; \int_R \varphi_u^t \left[\, (DF)^t - DF \, \right]_{\varphi(u,v)} \varphi_v \, dudv \; .$$

a) Comprueba la fórmula en los siguientes casos, donde $n = 4$:

$$\begin{aligned} \varphi(u,v) &= (u, u^2, u+v, uv) \;\; , \;\; R = \{0 \le v \le u \le 1\} \;\; , \;\; F \; = \; (x_1 x_3, 1, x_3, x_2) \; , \\ \varphi(u,v) &= (v, 3u, uv, u+v) \;\; , \;\; R = \{u^2 + v^2 \le 1\} \;\; , \;\; F \; = \; (0, x_1, 0, x_3) \; . \end{aligned}$$

b) Vuelve a comprobar los dos casos, usando el lenguaje de la formas diferenciales aplicado a $\omega = F^\flat$.

<u>Problema</u> 5. Considera la región $R = \{(u,v) \,:\, u^2+v^2 \leq 2\}$ y la siguiente aplicación

$$\psi : R \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad \psi(u,v) \;\equiv\; \big((1-u^2-v^2)u \,,\, v \,,\, u^2+v^2 \big) \;.$$

Elige un camino $\alpha(t)$ que le dé una vuelta antihoraria al borde de R.

a) Para $\omega = ydx - xdy + dz$, comprueba que se cumple la fórmula de Stokes

$$\int_\psi d\omega \;=\; \int_{\psi\circ\alpha} \omega \;.$$

b) ¿Es la imagen $\psi(R)$ parte de una subvariedad? (Mírala de perfil, en la dirección del eje y).

<u>Problema</u> 6. Para cada una de las siguientes formas de Pfaff decide si es exacta y, en caso afirmativo, encuentra un **potencial,** es decir una función escalar h tal que $\omega \equiv dh$.

a) $\omega = (x+y)\,dx + (y-x)\,dy$ en $\mathbb{R}^2$.

b) $\omega = y\cos(yz)\,dx + \big(\, x\cos(yz) - xyz\,\mathrm{sen}(yz) + 2yz \,\big)dy + \big(\, y^2 - xy^2\,\mathrm{sen}(yz) \,\big)\, dz$ en $\mathbb{R}^3$.

<u>Problema</u> 7. Halla una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de tal manera que la forma $\omega = x^2y\,dx + f(x)\,dy$ sea exacta en $\mathbb{R}^2$.

<u>Problema</u> 8. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto *convexo.* Demuestra que toda forma de Pfaff cerrada en U es exacta en U.
Indicación: explica cómo deformar cada camino cerrado en U a uno constante, sin salirse de U.

<u>Problema</u> 9. Sean abiertos $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $U' \subseteq \mathbb{R}^s$. Sean $f : U \to U'$ al menos de clase $\mathcal{C}^2$ y ω una forma diferencial en U'.

a) Demuestra que si ω es cerrada entonces $f^*\omega$ es también cerrada.

b) Demuestra que si ω es exacta entonces $f^*\omega$ también es exacta.