23/01/2021 1

Wavelets and Signal Processing

4.6. TRANSFORMADA DE ONDÍCULAS EN FORMA MATRICIAL

En la proposición 4.5.1 y el Ejercicio 4.5.1 hemos probado

$$c_{j-1}[p] = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k-2p]\, c_j[k] \quad , p \in \mathbb{Z} \quad (4.6.1)$$

$$d_{j-1}[p] = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k-2p]\, c_j[k] \quad , p \in \mathbb{Z} \quad (4.6.2)$$

donde $\{h[k]\}_{k\in\mathbb{Z}}$ son los coeficientes del filtro de paso bajo y $\{g[k]\}_{k\in\mathbb{Z}}$ son los del filtro de paso alto.

Escribir (4.6.1) con matrices

$$\underbrace{\sqrt{2}}_{\sqrt{2}}\underbrace{\begin{bmatrix} & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & h[0] & h[1] & h[2] & \cdots \\ \cdots & h[-2] & h[-1] & h[0] & \cdots \\ \cdots & h[-4] & h[-3] & h[-2] & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}}_{H} \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ c_j[0] \\ c_j[1] \\ c_j[2] \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\vec{c}_j} = \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ c_{j-1}[0] \\ c_{j-1}[1] \\ c_{j-1}[2] \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\vec{c}_{j-1}}$$

$$(4.6.1) \iff \sqrt{2}\, H \vec{c}_j = \vec{c}_{j-1} \quad (4.6.1')$$

Escribir (4.6.2) con matrices

$$\underbrace{\sqrt{2}}_{\sqrt{2}}\underbrace{\begin{bmatrix} & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & g[0] & g[1] & g[2] & \cdots \\ \cdots & g[-2] & g[-1] & g[0] & \cdots \\ \cdots & g[-4] & g[-3] & g[-2] & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}}_{G} \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ c_j[0] \\ c_j[1] \\ c_j[2] \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\vec{c}_j} = \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ d_{j-1}[0] \\ d_{j-1}[1] \\ d_{j-1}[2] \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\vec{d}_{j-1}}$$

$$(4.6.2) \iff \sqrt{2}\, G \vec{c}_j = \vec{d}_{j-1} \quad (4.6.2')$$

Ejercicio 4.6.1 Supongamos que $h(\omega) = h[0] + h[1]e^{-2\pi i\omega}$ es un filtro finito y que el vector $\vec{c}_j = (c_j[0], c_j[1], c_j[2], c_j[3])^T$ solo tiene cuatro componentes. Escribir las fórmulas (4.6.1') y (4.6.2') en este caso

S/

$$\sqrt{2}\left[\begin{array}{cccc} \overline{h[0]} & \overline{h[1]} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{h[0]} & \overline{h[1]} \\ \hline \overline{g[0]} & \overline{g[1]} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{g[0]} & \overline{g[1]} \end{array}\right]\begin{bmatrix} c_j[0] \\ c_j[1] \\ c_j[2] \\ c_j[3] \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} c_{j-1}[0] \\ c_{j-1}[1] \\ \hline d_{j-1}[0] \\ d_{j-2}[0] \end{array}\right] \begin{array}{c} (4.6.1') \\ \\ (4.6.2') \end{array}$$

Las ecuaciones (4.6.1') y (4.6.2') pueden escribirse juntas:

si $W = \sqrt{2}\begin{bmatrix} H \\ \hline G \end{bmatrix}$

$$W\vec{c}_j = \sqrt{2}\begin{bmatrix} H \\ \hline G \end{bmatrix}\vec{c}_j = \begin{bmatrix} \vec{c}_{j-1} \\ \hline \vec{d}_{j-1} \end{bmatrix} \qquad (4.6.3)$$

que es la expresión matricial de la transformada de ondículas.

La inversa de la transf. de ondículas está en la Prop 4.5.2:

$$c_j[p] = \sqrt{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[p-2k]\, c_{j-1}[k] + \sqrt{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} g[p-2k]\, d_{j-1}[k], \quad p \in \mathbb{Z} \qquad (4.6.4)$$

En forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ c_j[0] \\ c_j[1] \\ c_j[2] \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\vec{c}_j} = \sqrt{2}\, \underbrace{\begin{bmatrix} & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & h[0] & h[-2] & h[-4] & \cdots \\ \cdots & h[1] & h[-1] & h[-3] & \cdots \\ \cdots & h[2] & h[0] & h[-2] & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}}_{\overline{H}^T = H^*} \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ c_{j-1}[0] \\ c_{j-1}[1] \\ c_{j-1}[2] \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\vec{c}_{j-1}} + \sqrt{2}\, G^* \vec{d}_{j-1}$$

$$\vec{c}_j = \sqrt{2}\, H^* \vec{c}_{j-1} + \sqrt{2}\, G^* \vec{d}_{j-1} \qquad (4.6.5)$$

(4.6.5) se puede escribir

$$\vec{c}_j = \sqrt{2}\,[H^* \mid G^*]\begin{bmatrix}\vec{c}_{j-1}\\ \hline \vec{d}_{j-1}\end{bmatrix} = W^*\begin{bmatrix}\vec{c}_{j-1}\\ \vec{d}_{j-1}\end{bmatrix} \quad (4.6.6)$$

que es la inversa de la transformada de ondículas.

Sustituyendo (4.6.6) en (4.6.3)

$$\begin{bmatrix}\vec{c}_{j-1}\\ \hline \vec{d}_{j-1}\end{bmatrix} = W\vec{c}_j = WW^*\begin{bmatrix}\vec{c}_{j-1}\\ \hline \vec{d}_{j-1}\end{bmatrix} \Rightarrow WW^* = I$$

(W es una matriz unitaria)

Como $W = \sqrt{2}\begin{bmatrix}H\\ \hline G\end{bmatrix}$

$$I = WW^* = \sqrt{2}\begin{bmatrix}H\\ \hline G\end{bmatrix}\sqrt{2}\,[H^* \mid G^*] = 2\left[\begin{array}{c|c} HH^* & HG^* \\ \hline GH^* & GG^*\end{array}\right]$$

Por tanto se cumple

$$2HH^* = I,\quad 2GG^* = I,\quad HG^* = 0 \qquad \left[I = \begin{pmatrix}1 & & 0\\ & 1 & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}\right]$$

¿ $(HG^*)^* = G^{**}H^* = GH^*$

Ejercicio 4.6.2 Usar $HH^* = I/2$ y que $h(\frac{1}{2}) = 0$ para hallar los coeficientes del filtro finito de longitud 2.

$h(\omega) = h[0] + h[1]e^{-2\pi i\omega}$ con $h[0], h[1] \in \mathbb{R}$

S/

$$H = \begin{bmatrix} h[0] & h[1] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h[0] & h[1]\end{bmatrix}$$

$$HH^T = \begin{bmatrix} h[0] & h[1] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h[0] & h[1]\end{bmatrix}\begin{bmatrix} h[0] & 0 \\ h[1] & 0 \\ 0 & h[0] \\ 0 & h[1]\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2\end{bmatrix}$$

$$\boxed{h[0]^2 + h[1]^2 = 1/2}$$

$$0 = h(1/2) = h[0] + h[1]e^{-2\pi i\frac{1}{2}} = h[0] - h[1]$$

$$\boxed{0 = h[0] - h[1]}$$

$$h[0] = \pm\frac{1}{2},\quad h[1] = \pm\frac{1}{2}$$

$$h(\omega) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2\pi i\omega} \quad \text{ó} \quad h(\omega) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2\pi i\omega}$$

(Haar)

4.7 Diseño de Filtros Finitos

Ejercicio 4.7.1 Sea φ una función de escala de un MRA. Demostrar que si $\operatorname{sop} \varphi \subset [0, N]$, entonces $h(\omega)$ es un pol. trigonométrico de la forma

$$h(\omega) = \sum_{-N<k<2N} h[k] e^{-2\pi i k \omega}$$

S/ Sabemos que

$$h[k] = \left\langle \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{x}{2}\right), T_k\varphi \right\rangle_2 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{x}{2}\right)\overline{\varphi(x-k)}\,dx$$

- $\operatorname{sop}\varphi(x) \subset [0, N]$; $\operatorname{sop}\varphi\left(\frac{x}{2}\right) \subset [0, 2N]$ y
  $\operatorname{sop}\varphi(x-k) \subset [k, N+k]$
- Si $k \geq 2N$, $|[0,2N] \cap [k, N+k]| = 0 \Rightarrow h[k] = 0$
- Si $k \leq -N$, $|[0,2N] \cap [k, N+k]| = 0 \Rightarrow h[k] = 0$

$h[k]$ solo puede ser no nulo si $-N<k<2N$.

Ejercicio 4.7.2 Sea $h(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-2\pi i k \omega}$ tal que $|h(\omega)|^2 + |h(\omega+\frac{1}{2})|^2 = 1$ $\forall \omega \in \mathbb{R}$. Probar

a) $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|^2 = \frac{1}{2}$

b) $\forall p \neq 0$, $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\overline{h[k-2p]} = 0$

S/

$$1 = |h(\omega)|^2 + |h(\omega+\tfrac{1}{2})|^2 = h(\omega)\overline{h(\omega)} + h(\omega+\tfrac{1}{2})\overline{h(\omega+\tfrac{1}{2})}$$

$$= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-2\pi i k\omega}\right)\left(\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \overline{h[\ell]}\, e^{2\pi i \ell \omega}\right) +$$

$$+ \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{-2\pi i k(\omega+\frac{1}{2})}\right)\left(\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \overline{h[\ell]}\, e^{2\pi i \ell(\omega+\frac{1}{2})}\right)$$

$(-1)^k = e^{-\pi i k}$ $\qquad$ $(-1)^\ell = e^{-\pi i \ell}$

$$1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h[k]\overline{h[\ell]}\, e^{-2\pi i(k-\ell)\omega} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h[k]\overline{h[\ell]}(-1)^{k+\ell} e^{-2\pi i(k-\ell)\omega}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h[k]\overline{h[\ell]}\, e^{-2\pi i(k-\ell)\omega}\left[1+(-1)^{\ell+k}\right]$$

$m = k-\ell$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[k]\overline{h[k-m]}\, e^{-2\pi i m\omega}\left[1+\underbrace{(-1)^{2k-m}}_{(-1)^{-m}=(-1)^{m}}\right]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[k]\overline{h[k-m]}\, e^{-2\pi i m\omega}\left[1+(-1)^{m}\right]$$

Intercambiar las sumas

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\overline{h[k-m]}\right) e^{-2\pi i m\omega}\left[1+(-1)^{m}\right]$$

$m = 2p$

$$\begin{cases} 1+(-1)^m = 0 & \text{si } m \text{ es impar} \\ 1+(-1)^m = 2 & \text{si } m \text{ es par} \end{cases}$$

$$= 2\sum_{p=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\overline{h[k-2p]}\right) e^{-2\pi i(2p)\omega}$$

Por el teorema de unicidad de los coef. de Fourier (Section 1.6)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|^2 = \frac{1}{2} \qquad (p=0)$$

y si $p \neq 0$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\overline{h[k-2p]} = 0$$

De $h(\frac{1}{2}) = 0$ se deduce

$$0 = h\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{-2\pi i \frac{1}{2} k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k](-1)^k \qquad (4.7.1)$$

$e^{-\pi i k} = (-1)^k$

Ejercicio 4.7.3 Hallar los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para que $h(\omega) = a + b e^{-2\pi i \omega}$ sea un filtro de paso bajo de un MRA.
(Usar Ej 4.7.2 y fórmula (4.7.1))

S/ $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{1}{2}$

$p \neq 0$; $\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \overline{h[k-2p]} = 0$ No da nada

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k](-1)^k = 0 \Rightarrow a - b = 0$

$a = \pm \frac{1}{2}$

$b = \pm \frac{1}{2}$

Queremos diseñar un filtro de longitud 4

$$h(\omega) = a + b e^{-2\pi i \omega} + c e^{-4\pi i \omega} + d e^{-6\pi i \omega}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \frac{1}{2}$

$p \neq 0$; $\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \overline{h[k-2p]} = 0 \overset{p=1}{\Rightarrow} a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \times a + d \cdot b = 0$

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k](-1)^k = 0 \Rightarrow a - b + c - d = 0$

I. Daubechies impuso la condición $h''(1/2) = 0$

$$h'(\omega) = b(-2\pi i) e^{-2\pi i \omega} + c(-4\pi i) e^{-4\pi i \omega} + d(-6\pi i) e^{-6\pi i \omega}$$

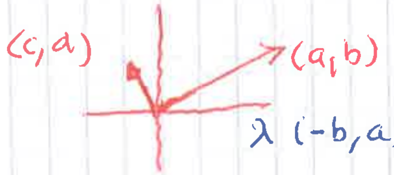
$$0 = h'(1/2) = b(-2\pi i)(-1) + c(-4\pi i) 1 + d(-6\pi i)(-1)$$

$$= 2\pi i [b - 2c + 3d]$$

$$b - 2c + 3d = 0$$

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & a^2+b^2+c^2+d^2 = \tfrac{1}{2} \\ (2) & ac+bd = 0 \\ (3) & a-b+c-d = 0 \\ (4) & b-2c+3d = 0 \end{array}\right\}$$

$\langle (a,b), (c,d) \rangle = 0$



$\lambda(-b,a) \perp (a,b)$

Tomando $c = -\lambda b$ y $d = \lambda a$ $(\lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{R})$ se cumple (2)

porque

$$a(-\lambda b) + b(\lambda a) = ab[-\lambda+\lambda] = 0.$$

De (1)

$$a^2+b^2+\lambda^2 b^2+\lambda^2 a^2 = \tfrac{1}{2} \ ; \quad a^2(1+\lambda^2)+b^2(1+\lambda^2) = \tfrac{1}{2}$$

$$a^2+b^2 = \frac{1}{2(1+\lambda^2)} \qquad (5)$$

De (3)

$$a-b-\lambda b-\lambda a = 0 \ ; \quad a(1-\lambda) - b(1+\lambda) = 0$$

$$b = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}\, a \quad (\lambda \neq -1) \qquad (6)$$

De (4)

$$b+2\lambda b+3\lambda a = 0 \implies b = \frac{-3\lambda a}{1+2\lambda} \quad \lambda \neq -\tfrac{1}{2} \qquad (7)$$

Igualando (6) y (7)

$$\frac{1-\lambda}{1+\lambda} = \frac{-3\lambda}{1+2\lambda} \iff (1-\lambda)(1+2\lambda) = (1+\lambda)(-3\lambda)$$

$$1+\lambda-2\lambda^2 = -3\lambda-3\lambda^2 \iff \lambda^2+4\lambda+1 = 0$$

$$\lambda = -2 \pm \sqrt{3} \qquad \boxed{\lambda = -2+\sqrt{3}} \qquad (8)$$

Sustituir en (6)

$$b = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}\, a = \frac{1+2-\sqrt{3}}{1-2+\sqrt{3}}\, a = \frac{3-\sqrt{3}}{-1+\sqrt{3}}\, a = \frac{(3-\sqrt{3})(-1-\sqrt{3})}{(-1+\sqrt{3})(-1-\sqrt{3})}\, a$$

$$= \sqrt{3}\, a$$

De (5) $a^2+b^2=\dfrac{1}{2(1+\lambda^2)} \xRightarrow{b=\sqrt{3}a} 4a^2 = \dfrac{1}{2[1+(-2+\sqrt{3})^2]} =$

$$= \frac{1}{2[1+4-4\sqrt{3}+3]} = \frac{1}{2[8-4\sqrt{3})} = \frac{1}{8(2-\sqrt{3})} = \frac{2+\sqrt{3}}{8}$$

Entonces

$$a^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{32} \qquad \left(a = \pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{32}}\right)$$

$$(1+\sqrt{3})^2 = 1+2\sqrt{3}+3 = 4+2\sqrt{3} = 2(2+\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow 2+\sqrt{3} = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{2}$$

$$a^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{32} = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{64} \Rightarrow a = \pm\left(\frac{1+\sqrt{3}}{8}\right)$$

Tomando $\boxed{a = \dfrac{1+\sqrt{3}}{8}}$ $\boxed{b = \dfrac{\sqrt{3}+3}{8}}$

$$c = -\lambda b = -(-2+\sqrt{3})\frac{\sqrt{3}+3}{8} = \frac{3-\sqrt{3}}{8} \qquad \boxed{c = \frac{3-\sqrt{3}}{8}}$$

$$d = \lambda a = (-2+\sqrt{3})\frac{1+\sqrt{3}}{8} = \frac{1-\sqrt{3}}{8}, \qquad \boxed{d = \frac{1-\sqrt{3}}{8}}$$

NOTA: Para hacer un filtro de longitud 6, hace falta usar las ecuaciones del ejer 4.7.1 (salen 3 ecuaciones), y $h(\frac{1}{2})=0$, $h'(\frac{1}{2})=0$, $h''(\frac{1}{2})=0$. Cuanto más largo es el filtro, más regular es la función de escala y también la ondícula.

Otra forma de hallar filtros finitos: queremos hallar $h(\omega)$ tal que $|h(\omega)|^2+|h(\omega+\frac{1}{2})|^2=1$ y $h(0)=1$

Para $k=0,1,2,3,$ sea c_k t.q. $\frac{1}{c_k}=\int_0^{1/2}(\operatorname{sen} 2\pi x)^{2k+1}\,dx>0$

Definir
$$P_k(\omega)=1-c_k\int_0^{\omega}(\operatorname{sen} 2\pi x)^{2k+1}\,dx \qquad (3.7.1)$$
que es un polinomio trigonométrico.

Lema 4.7.1 El pol. trig P_k cumple $P_k(\omega)+P_k(\omega+\frac{1}{2})=1$ y $P_k(0)=1$. Además, $P_k(\omega)=P_k(-\omega)$ por lo que P_k es un polinomio trig. en cosenos

D/ $P_k(0)=1-c_k\int_0^{0}(\operatorname{sen} 2\pi x)^{2k+1}\,dx=1$

$$P_k(\omega)+P_k(\omega+\tfrac{1}{2})=1-c_k\int_0^{\omega}(\operatorname{sen} 2\pi x)^{2k+1}\,dx+1-c_k\int_0^{\omega+\frac{1}{2}}(\operatorname{sen} 2\pi x)^{2k+1}\,dx$$
$$=2-c_k\int_0^{\omega}(\operatorname{sen} 2\pi x)^{2k+1}\,dx-\underbrace{c_k\int_0^{1/2}(\operatorname{sen} 2\pi x)^{2k+1}\,dx}_{1}-c_k\int_{1/2}^{\omega+1/2}(\operatorname{sen} 2\pi x)^{2k+1}\,dx \qquad x=y+\tfrac{1}{2}$$
$$=1-c_k\int_0^{\omega}(\operatorname{sen} 2\pi x)^{2k+1}\,dx-c_k\int_0^{\omega}\operatorname{sen}(2\pi y+\pi)^{2k+1}\,dy$$
$$=1-c_k\int_0^{\omega}(\operatorname{sen} 2\pi x)^{2k+1}\,dx+c_k\int_0^{\omega}(\operatorname{sen} 2\pi y)^{2k+1}\,dy=1$$

$$P_k(-\omega)=1-\int_0^{-\omega}(\operatorname{sen} 2\pi x)^{2k+1}\,dx=1-\int_0^{\omega}(-\operatorname{sen} 2\pi y)^{2k+1}(-dy) \qquad x=-y$$
$$=1-\int_0^{\omega}(\operatorname{sen} 2\pi y)^{2k+1}\,dy=P_k(\omega)$$

Ejercicio 3.7.1 Probar que $P_0(\omega)=\left|\frac{1+e^{-2\pi i\omega}}{2}\right|^2=\cos^2\pi\omega$

S/ $\frac{1}{c_0}=\int_0^{1/2}(\operatorname{sen} 2\pi x)\,dx=\left[-\frac{\cos 2\pi x}{2\pi}\right]_0^{1/2}=\left[\frac{1+1}{2\pi}\right]=\frac{1}{\pi}$

$\boxed{c_0=\pi}$

$$P_0(\omega) = 1 - \pi \int_0^\omega (\operatorname{sen} 2\pi x)\, dx = 1 - \pi \left[-\frac{\cos 2\pi x}{2\pi} \right]_0^\omega$$

$$= 1 + \frac{\cos 2\pi \omega}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1 + \cos 2\pi\omega}{2} = \cos^2 \pi\omega =$$

$$= \left| \frac{1 + e^{-2\pi i \omega}}{2} \right|^2 \Rightarrow h_0(\omega) = \frac{1 + e^{-2\pi i\omega}}{2}$$

4.8. Ondículas para imágenes

- Si ψ es un ond. o.n de $L^2(\mathbb{R})$, $\{\psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}\}$ es base o.n. de $L^2(\mathbb{R})$. Se prueba que el "producto tensorial"

$$\{\psi_{j_1,k_1}(x_1)\psi_{j_2,k_2}(x_2) : j_1, j_2 \in \mathbb{Z}, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\}$$

es base o.n. de $L^2(\mathbb{R}^2)$. Esta base mezcla información a escalas diferentes 2^{j_1} y 2^{j_2}

- Otra forma es usar el concepto de MRA-2D

Def 4.8.1 (MRA-2D)
$\{V_j^{(2)} : j \in \mathbb{Z}\}$ subesp. cerrados de $L^2(\mathbb{R}^2)$ y $\varphi^{(2)} \in V_0^{(2)}$ "función de escala" t.q.

(1) $V_j^{(2)} \subset V_{j+1}^{(2)}$ $\forall j \in \mathbb{Z}$ (2) $f \in V_j^{(2)} \Leftrightarrow D_{2,2} f \in V_{j+1}^{(2)}$

(3) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j^{(2)} = \{0\}$; (4) $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j^{(2)}} = L^2(\mathbb{R}^2)$

(5) $\{\varphi^{(2)}(x_1 - k_1, x_2 - k_2) : k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\}$ es b.o.n de $V_0^{(2)}$

Vamos a hacer un MRA-2D a partir de un MRA-1D, que llamamos $(\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}, \varphi)$. Para $j \in \mathbb{Z}$, definir

$$V_j^{(2)} = V_j \otimes V_j = \overline{\operatorname{span}\{ f(x_1) g(x_2) : f, g \in V_j \}},$$

que cumplen (1), (2), (3) y (4) de MRA-2D. Definimos

$$\varphi^{(2)}(x_1,x_2)=\varphi(x_1)\varphi(x_2)$$

y se cumple que $\{\varphi(x_1-k_1)\varphi(x_2-k_2)=\varphi^{(2)}(x_1-k_1,x_2-k_2):$ $k_1,k_2\in\mathbb{Z}\}$ es b.o.n. de $V_0\otimes V_0=V_0^{(2)}$.

Como en el caso 1-D, se puede probar que

$$\{\varphi^{(2)}_{j,(k_1,k_2)}(x_1,x_2)=\varphi_{j,k_1}(x_1)\varphi_{j,k_2}(x_2):k_1,k_2\in\mathbb{Z}\}$$

es base o.n. de $V_j\otimes V_j=V_j^{(2)}$.

Como $V_j^{(2)}\subset V_{j+1}^{(2)}$, llamamos $W_j^{(2)}$ al complemento ortogonal de $V_j^{(2)}$ en $V_{j+1}^{(2)}$ e.d. $V_j^{(2)}\oplus W_j^{(2)}=V_{j+1}^{(2)}$

Prop 4.8.1

$(\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}},\varphi)$ MRA-1D. Sea ψ ondícula o.n. de $L^2(\mathbb{R})$ asociada a este MRA-1D. Considerar

$$\psi^h(x_1,x_2)=\varphi(x_1)\psi(x_2),\quad \psi^v(x_1,x_2)=\psi(x_1)\varphi(x_2)$$

$$\psi^d(x_1,x_2)=\psi(x_1)\psi(x_2)$$

(h = horizontal, v = vertical, d = diagonal). Los trasladados de ψ^h,ψ^v,ψ^d por elementos de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ forman una base o.n. de $W_0^{(2)}$.

D/ Tenemos

$$V_0^{(2)}\oplus W_0^{(2)}=V_1^{(2)}=V_1\otimes V_1=(V_0\oplus W_0)\otimes(V_0\oplus W_0)$$

$$=\underbrace{(V_0\otimes V_0)}_{V_0^{(2)}}\oplus(V_0\otimes W_0)\oplus(W_0\otimes V_0)\oplus(W_0\otimes W_0)$$

$$W_0^{(2)}=(V_0\otimes W_0)\oplus(W_0\otimes V_0)\oplus(W_0\otimes W_0).$$

- $\{\varphi(x_1-k_1)\psi(x_2-k_2) : k_1,k_2\}$ es b.o.n. de $V_0 \otimes W_0$
- $\{\psi(x_1-k_1)\varphi(x_2-k_2) : k_1,k_2\}$ es b.o.n de $W_0 \otimes V_0$
- $\{\psi(x_1-k_1)\psi(x_2-k_2) : k_1,k_2\}$ es b.o.n. de $W_0 \otimes W_0$

De la Prop 4.8.1,

$$\{\psi^{\varepsilon}_{0,(k_1,k_2)} : k_1,k_2 \in \mathbb{Z} \ , \ \varepsilon = h, v, d\}$$

es base o.n. de $W_0^{(2)}$. Como en el caso 1-D, si $j \in \mathbb{Z}$,

$$\{\psi^{\varepsilon}_{j,(k_1,k_2)} : k_1,k_2 \in \mathbb{Z}, \ \ \varepsilon = h, v, d\}$$

es base.o.n. de $W_j^{(2)}$. Como

$$L^2(\mathbb{R}^2) = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j^{(2)}$$

Por tanto

$$\{\psi^{\varepsilon}_{j,(k_1,k_2)} : j \in \mathbb{Z}, \ (k_1,k_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ , \ \varepsilon = h, v, d\}$$

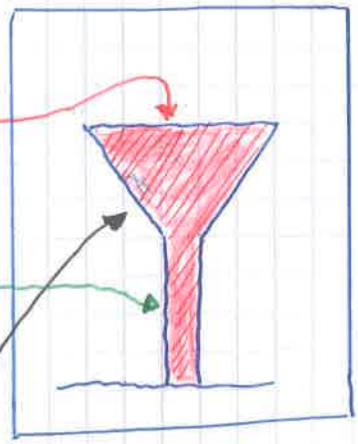
es base ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^2)$ (4.8.1)

NOTA: Si $F \in L^2(\mathbb{R}^2)$, en la base (4.8.1) los coeficientes

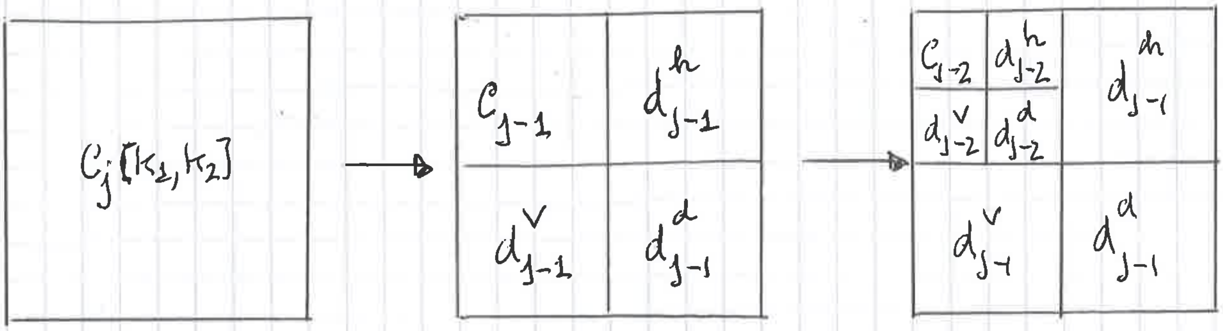
$\langle F, \psi^{h}_{j,(k_1,k_2)} \rangle$ detectan singularidades horizontales

$\langle F, \psi^{v}_{j,(k_1,k_2)} \rangle$ detectan singularidades verticales

$\langle F, \psi^{d}_{j,(k_1,k_2)} \rangle$ detectan singularidades diagonales



Hay un algoritmo para hacer la transformada de ondículas 2D que se resume gráficamente en:



FIN