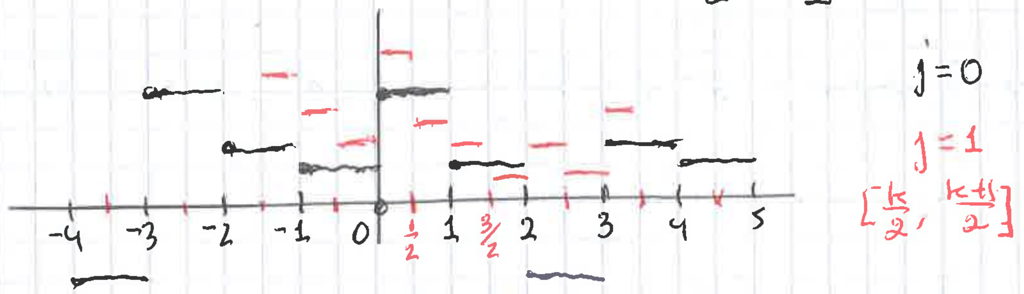
4.3.2. EJEMPLOS DE MRA

1. MRA de HAAR

$V_j = \{ f \in L^2(\mathbb{R}) : f \text{ es constante en } [\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}), k \in \mathbb{Z} \}$



(1) • Es fácil ver que $V_j \subset V_{j+1}$ porque $[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}) = [\frac{2k}{2^{j+1}}, \frac{2k+2}{2^{j+1}}) \supset [\frac{2k}{2^{j+1}}, \frac{2k+1}{2^{j+1}})$.

(2) • $f \in V_j$, $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \chi_{[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j})}(x)$. Entonces

$$D_2 f(x) = \sqrt{2} f(2x) = \sqrt{2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \chi_{[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}]}(2x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sqrt{2} a_k \chi_{[\frac{k}{2^{j+1}}, \frac{k+1}{2^{j+1}})}(x)$$

$\in V_{j+1}$

(5) Definir $\varphi = \chi_{[0,1]}$. Como $V_0 = \{ f \in L^2(\mathbb{R}) : f$ constante en $[k, k+1)\}$ y $T_k\varphi(x) = \varphi(x-k) = \chi_{[0,1]}(x-k) = \chi_{[k,k+1)}(x)$, entonces $\{T_k \varphi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es base o.n. de V_0

Ejercicio 4.3.3 Calcular $\mathcal{F}\varphi$

S/ $\mathcal{F}\varphi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[0,1]}(x) e^{-2\pi i \omega x} dx = \int_0^1 e^{-2\pi i \omega x} dx =$

$$= \left[-\frac{1}{2\pi\omega i} e^{-2\pi i \omega x} \right]_0^1 = \frac{1 - e^{-2\pi i \omega}}{2\pi\omega i} = e^{-\pi i \omega} \frac{e^{\pi i \omega} - e^{-\pi i \omega}}{2\pi i \omega}$$

$$= \begin{cases} e^{-\pi i \omega} \dfrac{\operatorname{sen} \pi\omega}{\pi\omega} & \text{si } \omega \neq 0 \\ 1 & \text{si } \omega = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\omega\to 0} e^{-\pi i \omega} \frac{\operatorname{sen} \pi\omega}{\pi\omega} = 1 \lim_{\omega\to 0} \frac{\operatorname{sen} \pi\omega}{\pi\omega} = 1$$

Como $\mathcal{F}\varphi$ es continua en $\omega = 0$ y $\mathcal{F}\varphi(0) = 1 \neq 0$, por la nota 2, se cumple (4). La propiedad (3) se cumple siempre por la nota 1

Por la Prop 4.3.3,

$$\{ D_{2^j} T_k \varphi(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k) : k \in \mathbb{Z} \} \text{ es b.o.n. de } V_j.$$

$$\varphi(2^j x - k) = 1 \iff \chi_{[0,1]}(2^j x - k) = 1 \iff 0 \le 2^j x - k \le 1$$

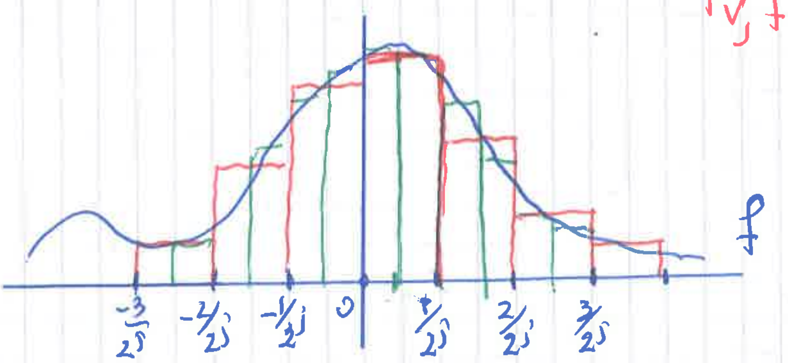
$$\iff \frac{k}{2^j} \le x \le \frac{k+1}{2^j}.$$ Por tanto

$$\{ D_{2^j} T_k \varphi(x) = 2^{j/2} \chi_{[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}]}(x) : k \in \mathbb{Z} \} \text{ es b.o.n. de } V_j.$$

Sabemos

$$P_{V_j} f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) 2^{j/2} \chi_{[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^{j+1}}]}(x)\, dx \right) 2^{j/2} \chi_{[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j})}(x)$$

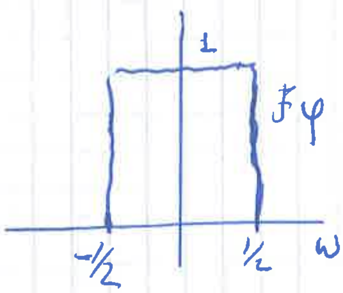
$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1/2^j} \left(\int_{k/2^j}^{\frac{k+1}{2^j}} f(x)\, dx \right) \chi_{[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j})}(x)$$



2. MRA de Shannon

$\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ dada por $\mathcal{F}\varphi(\omega) = \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\omega)$

$$\varphi(x) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i \omega x}\, d\omega = \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{\pi x}, & x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



Definir $V_0 = \overline{\text{span}\{T_k\varphi : k \in \mathbb{Z}\}} \subset L^2(\mathbb{R})$

$$\langle T_{k_1}\varphi, T_{k_2}\varphi\rangle \overset{\text{Parseval}}{=} \langle \mathcal{F}T_{k_1}\varphi, \mathcal{F}T_{k_2}\varphi\rangle = \langle M_{-k_1}\mathcal{F}\varphi, M_{-k_2}\mathcal{F}\varphi\rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i k_1 \omega}\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(\omega)\, e^{+2\pi i k_2 \omega}\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(\omega)\, d\omega =$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i (k_1-k_2)\omega}\, d\omega = \begin{cases} 1 & \text{si } k_1 = k_2 \\ 0 & \text{si } k_1 \neq k_2 \end{cases}$$

$\{T_k\varphi : k \in \mathbb{Z}\}$ es s.o.n. de V_0 y es base porque V_0 está generado por las combinaciones lineales finitas de $\{T_k\varphi : k \in \mathbb{Z}\}$

Definir $V_j = \overline{\text{span}\{D_{2^j}T_k\varphi = \varphi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}}$ (Prop 4.3.3)

Ejercicio 4.3.4. Hallar el soporte de $\mathcal{F}(\varphi_{j,k})$

S/ $\mathcal{F}(\varphi_{j,k})(\omega) = \mathcal{F}(D_{2^j}T_k\varphi)(\omega) = D_{2^{-j}}\mathcal{F}(T_k\varphi)(\omega) = D_{2^{-j}}M_{-k}\mathcal{F}\varphi(\omega)$

$$= D_{2^{-j}}M_{-k}\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(\omega) = 2^{-j/2}M_{-k}\chi_{[-1/2,1/2]}(2^{-j}\omega) = 2^{-j/2}e^{-2\pi i k 2^{-j}\omega}\chi_{[-1/2,1/2]}(2^{-j}\omega)$$

$$\mathcal{F}(\varphi_{j,k})(\omega) \neq 0 \iff -\frac{1}{2} \le 2^{-j}\omega \le \frac{1}{2} \iff -\frac{2^j}{2} \le \omega \le \frac{2^j}{2}$$

$$\text{sop}\,\mathcal{F}(\varphi_{j,k}) = \left[-\frac{2^j}{2}, \frac{2^j}{2}\right]$$

$$V_j = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \text{sop}\,\mathcal{F}f \subset \left[-\frac{2^j}{2}, \frac{2^j}{2}\right]\right\}$$

(1) $V_j \subset V_{j+1}$ porque $\left[-\frac{2^j}{2}, \frac{2^j}{2}\right] \subset \left[-\frac{2^{j+1}}{2}, \frac{2^{j+1}}{2}\right]$

(3) $\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}$ porque $\bigcap_{j=-\infty}^{\infty}\left[-\frac{2^j}{2}, \frac{2^j}{2}\right] = \{0\}$

(4) $\overline{\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j} = L^2(\mathbb{R})$ porque $\bigcup_{j=-\infty}^{\infty}\left[-\frac{2^j}{2}, \frac{2^j}{2}\right] = \mathbb{R}$

(2) es por la definición de V_j.

4.4. DISEÑO DE ONDÍCULAS A PARTIR DE UN MRA

4.4.1. Filtros asociados a un MRA

$(\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}, \varphi)$ MRA. $\varphi \in V_0 \Rightarrow \frac{1}{2}\varphi(\frac{x}{2}) \in V_{-1} \subset V_0$.

Como $\{T_k\varphi : k\in\mathbb{Z}\}$ es b.o.n de V_0

$$\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{x}{2}\right) \overset{L^2(\mathbb{R})}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, T_k\varphi(x) \qquad (4.4.1)$$

donde $\{h[k]\}_{k=-\infty}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ por Plancherel: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|^2 =$

$$= \left\|\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\right\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4}\left|\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\right|^2 dx \overset{x/2=y}{=} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(y)|^2 dy = \frac{1}{2}\|\varphi\|_2^2 < \infty$$

¿Cómo se calcula $h[k]$?

$$h[k] = \left\langle \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{x}{2}\right), T_k\varphi\right\rangle_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\overline{\varphi(x-k)}\, dx \qquad (4.4.2)$$

Ejercicio 4.4.1. Si $f(x) = \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{x}{2}\right)$, probar que $\mathcal{F}f(\omega) = \mathcal{F}\varphi(2\omega)$

s/

$$\mathcal{F}f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{x}{2}\right) e^{-2\pi i\omega x} dx \overset{x/2=y}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\varphi(y)\, e^{-2\pi i\omega 2y}\, 2dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\, e^{-2\pi i(2\omega)y} dy = \mathcal{F}\varphi(2\omega)$$

Tomar $\mathcal{F}$ en (4.4.1)

$$\mathcal{F}\varphi(2\omega) \overset{L^2(\mathbb{R})}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, \mathcal{F}(T_k\varphi)(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, M_{-k}\mathcal{F}\varphi(\omega)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{-2\pi i k\omega}\mathcal{F}\varphi(\omega) = \underbrace{\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{-2\pi i k\omega}\right)}_{h(\xi)}\mathcal{F}\varphi(\omega)$$

La función 1-periódica

$$h(\omega) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-2\pi i k\omega} \qquad (4.4.3)$$

Se llama FILTRO DE PASO BAJO del MRA, y $h \in L^2_p([0,1))$ porque $\{h[k]\}_{k=-\infty}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ y satisface

$$\mathcal{F}\varphi(2\omega) = h(\omega)\,\mathcal{F}\varphi(\omega) \qquad (4.4.4)$$

Prop 4.4.1. El filtro de paso bajo $h(\omega)$ satisface $|h(\omega)|^2 + |h(\omega+\frac{1}{2})|^2 = 1$ c.t. $\omega \in \mathbb{R}$. Además, si $\mathcal{F}\varphi(0)=1$, entonces $h(0)=1$.

D/ $\{T_k\varphi : k \in \mathbb{Z}\}$ s.o.n. en $L^2(\mathbb{R})$. Por la Prop 4.3.1

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}\varphi(\omega+k)|^2 = 1 \quad \text{c.t. } \omega \in \mathbb{R}$$

$$1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}\varphi(2\omega+k)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}\varphi(2(\omega+\tfrac{k}{2}))|^2 \stackrel{(4.4.4)}{=}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(\omega+\tfrac{k}{2})|^2 |\mathcal{F}\varphi(\omega+\tfrac{k}{2})|^2$$

Separamos la suma en los términos pares e impares

$k=2\ell$ $\qquad$ $k=2\ell+1$

$$= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} |h(\omega+\ell)|^2 |\mathcal{F}\varphi(\omega+\ell)|^2 + \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} |h(\omega+\ell+\tfrac{1}{2})|^2 |\mathcal{F}\varphi(\omega+\ell+\tfrac{1}{2})|^2$$

(h es 1-periódica)

$$= |h(\omega)|^2 \underbrace{\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}\varphi(\omega+\ell)|^2}_{1 \text{ c.t. } \omega} + |h(\omega+\tfrac{1}{2})|^2 \underbrace{\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}\varphi(\omega+\tfrac{1}{2}+\ell)|^2}_{1 \text{ c.t. } \omega}$$

$$= |h(\omega)|^2 + |h(\omega+\tfrac{1}{2})|^2 \quad \text{c.t. } \omega$$

4.4.2. La receta de S. Mallat para diseñar ondículas

$(\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}, \varphi)$ MRA; sea W_0 el complemento ortogonal de V_0 en V_1, es decir, $V_0 \oplus W_0 = V_1$.

Para $j \neq 0$, $j \in \mathbb{Z}$ definir

$$W_j = \{ D_{2^j} f : f \in W_0 \}$$

Ejercicio 4.4.2 Probar que $V_j \oplus W_j = V_{j+1}$

Para entregar el 24/07

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1} \oplus W_j = V_{j-2} \oplus W_{j-2} \oplus W_{j-1} \oplus W_j$$

$$= \cdots = \bigoplus_{\ell=-\infty}^{j} W_\ell \qquad \left(\text{puesto que } \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}\right)$$

Como $\overline{\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j} = L^2(\mathbb{R})$, se obtiene

$$\bigoplus_{\ell=-\infty}^{\infty} W_\ell = L^2(\mathbb{R}) \qquad (4.4.5)$$

Si encontramos $\psi \in W_0$ tal que $\{T_k \psi : k \in \mathbb{Z}\}$ sea b.o.n. de W_0, como en la Prop 4.3.3, $\{\psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ es b.o.n. de W_j. Entonces (4.4.5) implica

$$\{\psi_{j,k} : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\}$$

es base o.n. de $L^2(\mathbb{R})$ – ¡Y tendremos una ondícula!

Prop 4.3.2 V, W subespacios cerrados de $L^2(\mathbb{R})$ con bases o.n $\{T_k\varphi : k\in\mathbb{Z}\}$ y $\{T_k\psi : k\in\mathbb{Z}\}$ respec. Son equivalentes

i) $V\perp W$ ii) $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\varphi(\omega+k)\,\overline{\mathcal{F}\psi(\omega+k)}=0$ c.t. $\omega\in\mathbb{R}$

D/ $\langle T_k\varphi,\psi\rangle \overset{\text{Parseval}}{=} \langle \mathcal{F}T_k\varphi, \mathcal{F}\psi\rangle = \langle M_{-k}\mathcal{F}\varphi, \mathcal{F}\psi\rangle$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i k\omega}\,\mathcal{F}\varphi(\omega)\,\overline{\mathcal{F}\psi(\omega)}\,d\omega =$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_l^{l+1} \mathcal{F}\varphi(\omega)\,\overline{\mathcal{F}\psi(\omega)}\, e^{-2\pi i k\omega}\, d\omega \overset{\omega=\eta+l}{=}$$

eta

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^1 \mathcal{F}\varphi(\eta+l)\,\overline{\mathcal{F}\psi(\eta+l)}\, e^{-2\pi i k(\eta+l)}\, d\eta$$

$$e^{-2\pi i k\eta}\,\underbrace{e^{-2\pi i k l}}_{1}$$

$$= \int_0^1 \underbrace{\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\varphi(\eta+l)\,\overline{\mathcal{F}\psi(\eta+l)}\right)}_{H(\eta)\ 1\text{-periódica}} e^{-2\pi i k\eta} \qquad (4.4.6)$$

ii) $\Rightarrow$ i) Si $H(\eta)=0$ c.t. $\eta\in\mathbb{R} \overset{(4.4.6)}{\Longrightarrow} \langle T_k\varphi,\psi\rangle=0$ $\forall k\in\mathbb{Z}$. Si $k_1, k_2\in\mathbb{Z}$

$$\langle T_{k_1}\varphi, T_{k_2}\psi\rangle = \langle T_{-k_2}T_{k_1}\varphi,\psi\rangle = \langle T_{k_1-k_2}\varphi,\psi\rangle = 0$$

i) $\Rightarrow$ ii) $V\perp W \Rightarrow \langle T_k\varphi,\psi\rangle=0$ $\forall k\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow$

Los coef. de Fourier de $H(\eta)$ son todos cero. Por el teorema de unicidad para series de Fourier (Sec 1.6) $H(\eta)=0$ c.t. $\eta\in\mathbb{R}$. ∎

Queremos hallar $\psi \in W_0$: $\frac{1}{2}\psi\left(\frac{x}{2}\right) \in W_{-1}$. Como $V_{-1} \oplus W_{-1} = V_0$ tenemos $\frac{1}{2}\psi\left(\frac{x}{2}\right) \in V_0$. Como $\{T_k\varphi : k \in \mathbb{Z}\}$ son b.o.n. de V_0,

$$\frac{1}{2}\psi\left(\frac{x}{2}\right) \overset{L^2(\mathbb{R})}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]\, T_k\varphi(x) \qquad (4.4.7)$$

con $\{g[k]\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Se tiene

$$g[k] = \left\langle \frac{1}{2}\psi\left(\frac{x}{2}\right), T_k\varphi \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\psi\left(\frac{x}{2}\right) \overline{\varphi(x-k)}\, dx \qquad (4.4.8)$$

Tomando $\mathcal{F}$ en (4.4.7) tenemos

$$\mathcal{F}\psi(2\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]\, \mathcal{F}(T_k\varphi)(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]\, M_{-k}\mathcal{F}\varphi(\omega)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]\, e^{-2\pi i k\omega}\, \mathcal{F}\varphi(\omega) = \underbrace{\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]\, e^{-2\pi i k\omega}\right)}_{g(\omega)} \mathcal{F}\varphi(\omega)$$

La función $g(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]\, e^{-2\pi i k\omega}$ se llama FILTRO DE PASO ALTO y satisface

$$\mathcal{F}\psi(2\omega) = g(\omega)\, \mathcal{F}\varphi(\omega) \qquad (4.4.9)$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Prop 4.4.3} \quad \{T_k\psi : k\in\mathbb{Z}\} \text{ es s.o.n. en } L^2(\mathbb{R}) \iff \\ \qquad |g(\omega)|^2 + |g(\omega+\tfrac{1}{2})|^2 = 1 \quad \text{c.t. } \omega\in\mathbb{R}\end{array}}$$

D/ Se hace como la Prop 4.4.1 usando (4.4.9)