13/07/2021 (1)

**Ejercicio 2.4.1** Calcular $\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-2\pi i y \cdot}\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(\cdot)\right)(x)$

S/ $\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-2\pi i y \cdot}\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(\cdot)\right)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i y\omega}\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(\omega)\, e^{2\pi i x\omega}\, d\omega$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i\omega(x-y)}\, d\omega = \left[\frac{1}{2\pi i(x-y)} e^{2\pi i\omega(x-y)}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{e^{\pi i(x-y)} - e^{-\pi i(x-y)}}{2\pi i(x-y)} = \frac{\operatorname{sen} \pi(x-y)}{\pi(x-y)} \quad \text{si } x \neq y$$

Si $x=y$, $\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-2\pi i x\cdot}\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}\right) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1\, d\omega = 1$

NOMBRE: $\varphi_y(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}\pi(x-y)}{\pi(x-y)} & x \neq y \\ 1 & \text{si } x = y \end{cases}$ Seno Cardinal

---

**Teorema 2.4.2** (Whittaker - Shannon - Muestreo - I)

Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ con $\operatorname{sop} \mathcal{F}f \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Entonces

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\, \frac{\operatorname{sen}\pi(x-k)}{\pi(x-k)}, \qquad (2.4.1)$$

donde la serie converge en $L^2(\mathbb{R})$.

D/ $f \in L^2(\mathbb{R})$; como $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R})$.

Como $\operatorname{sop} \mathcal{F}f \subset [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, $\mathcal{F}f \in L^2([-\frac{1}{2},\frac{1}{2}])$.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\mathcal{F}f(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}f(\omega)|^2 d\omega = \|\mathcal{F}f\|_2^2 < \infty$$

Una base o.n. de $L^2([-\frac{1}{2},\frac{1}{2}])$ es $\{e_k(\omega)\}_{k=-\infty}^{\infty} = \{e^{-2\pi i k\omega}\}_{k=-\infty}^{\infty}$.

Entonces

$$\mathcal{F}f(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \mathcal{F}f, e^{-2\pi i k\cdot}\rangle_2\, e^{-2\pi i k\omega} \quad (\text{en } L^2([-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}]))$$

$$\langle \mathcal{F}f, e^{-2\pi i k\cdot}\rangle_2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathcal{F}f(\omega)\, e^{2\pi i k\omega}\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(\omega)\, e^{2\pi i k\omega}\, d\omega = f(k)$$

Inversa de $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F}f(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\, e^{-2\pi i k\omega} \quad \text{en } L^2([-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}])$$

Como $\operatorname{sop} \mathcal{F}f \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ podemos escribir

$$\mathcal{F}f(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\, e^{-2\pi i k\omega} \cdot \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(\omega) \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}). \qquad (2.4.2)$$

Hallando $\mathcal{F}^{-1}$:

Ejercicio 2.4.1

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\, \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-2\pi i k \omega} \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(\omega)\right)(x)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\, \frac{\operatorname{sen} \pi(x-k)}{\pi(x-k)} \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}). \qquad \blacksquare$$

---

Ejercicio 2.4.2. Sea $\varphi_k(x) = \dfrac{\operatorname{sen} \pi(x-k)}{\pi(x-k)}$ si $x \neq k$ y $\varphi_k(k) = 1$. Sea $PW_1(\mathbb{R}) = \{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \operatorname{sop} \mathcal{F}f \subset [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\}$ el espacio de Paley-Wiener. Probar que $\{\varphi_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ es una base o.n. de $PW_1(\mathbb{R})$

S/ Por el ejerc. 2.4.1

$$\mathcal{F}\varphi_k(\omega) = e^{-2\pi i k\omega} \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(\omega), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$k, m \in \mathbb{Z}$

$$\langle \varphi_k, \varphi_m \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \overset{\text{Parseval}}{=} \langle \mathcal{F}\varphi_k, \mathcal{F}\varphi_m \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i k\omega} e^{2\pi i m\omega} \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(\omega)\, d\omega$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i (k-m)\omega}\, d\omega = \begin{cases} 1 & \text{si } k = m \\ 0 & \text{si } k \neq m \end{cases}$$

$\{\varphi_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ es sistema o.n. de $PW_1(\mathbb{R})$. Por el teorema de muestreo (W-S) $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\varphi_k(x)$ en $L^2(\mathbb{R})$

Es decir $f_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} f(k)\varphi_k(x)$ convergen a $f(x)$ en $L^2(\mathbb{R})$. Luego $\{\varphi_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ es completo en $PW_1(\mathbb{R})$. $\blacksquare$

Como $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ es b.o.n. de $PW_1(\mathbb{R})$ y sabemos que si $f\in PW_1(\mathbb{R})$

$f=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\varphi_k$ (en $L^2(\mathbb{R})$). Plancherel: $\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|f(k)|^2$

Es decir, la "energía" de $f$, $E_f=\|f\|_2^2$, de una señal $f\in PW_1(\mathbb{R})$ está concentrada en sus muestras $\{f(k)\}_{k=-\infty}^{\infty}$

**Corolario 2.4.3.** Sea $f\in PW_1(\mathbb{R})$. La serie (2.4.1) converge a $f$ uniformemente.

D/ $\langle \mathcal{F}f, e^{-2\pi i x \cdot}\rangle_{L^2([-\frac{1}{2},\frac{1}{2}])} = \int_{-1/2}^{1/2}\mathcal{F}f(\omega)e^{2\pi i x\omega} \overset{f\in PW_1(\mathbb{R})}{=}$

$=\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}f(\omega)e^{2\pi i x\omega}d\omega \overset{\text{Inversa}}{=} f(x)$, $x\in\mathbb{R}$

Del Ej 2.4.1 tenemos

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-2\pi i x\cdot}\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(\cdot)\right)(y)=\varphi_x(y)=\frac{\operatorname{sen}\pi(y-x)}{\pi(y-x)}$$

Entonces

$$f(x)=\langle \mathcal{F}f, e^{-2\pi i x\cdot}\rangle_{L^2([-\frac{1}{2},\frac{1}{2}])} \overset{f\in PW_1(\mathbb{R})}{=} \langle \mathcal{F}f\cdot\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}, e^{-2\pi i x\cdot}\rangle_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$=\langle \mathcal{F}f, e^{-2\pi i x\cdot}\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(\cdot)\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \overset{\text{Parseval para } \mathcal{F}^{-1}}{=} \langle f,\varphi_x\rangle_{L^2(\mathbb{R})}$$

Hemos probado que si $f\in PW_1(\mathbb{R})$,

$$f(x)=\langle f,\varphi_x\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \qquad (2.4.3)$$

Sea $f_N(x)=\sum_{k=-N}^{N} f(k)\varphi_k(x)\in PW_1(\mathbb{R})$ pq. $\varphi_k\in PW_1(\mathbb{R})$

Entonces $f-f_N\in PW_1(\mathbb{R})$. Por (2.4.3)

$$f(x)-f_N(x)=\langle f-f_N,\varphi_x\rangle_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$\|f-f_N\|_\infty=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-f_N(x)|=\sup_{x\in\mathbb{R}}|\langle f-f_N,\varphi_x\rangle_2| \overset{C-S}{\leq}$$

$$\leq \sup_{x\in\mathbb{R}}\|f-f_N\|_2\|\varphi_x\|_2=\|f-f_N\|_2\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}\|\varphi_x\|_2\right)$$

$$\|\varphi_x\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} \pi(y-x)}{\pi(y-x)} \right|^2 dx$$ No tiene primitiva. Plancherel $\Rightarrow$

$$\|\varphi_x\|_2^2 = \|\mathcal{F}\varphi_x\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}\varphi_x(\omega)|^2 d\omega \overset{\text{Ej 2.4.1}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-2\pi i x\omega} \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(\omega) \right|^2 d\omega$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} 1 \, d\omega = 1.$$

Por tanto

$$\|f - f_N\|_\infty \leq \|f - f_N\|_2 \cdot 1 \xrightarrow{N\uparrow\infty} 0 \qquad \blacksquare$$

---

Ejercicio 2.4.3 (Whittacker - Shannon, Muestreo, II)

Sea $T>0$ y $f \in PW_T(\mathbb{R}) = \{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \operatorname{sop} \mathcal{F}f \subset [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \}$

Probar que

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{T}\right) \frac{\operatorname{sen} \pi(Tx-k)}{\pi(Tx-k)}$$

con convergencia en $L^2(\mathbb{R})$ y uniformemente en $\mathbb{R}$.

Sugerencia: Definir $g(x) = \frac{1}{T} f(\frac{x}{T})$ y probar que $g \in PW_1(\mathbb{R})$ para aplicar W-S, I y el Corolario 2.4.3. $x/T = y$

S/ $$\|g\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T^2} |f(\tfrac{x}{T})|^2 dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T^2} |f(y)|^2 T \, dy = \frac{1}{T} \|f\|_2^2 < \infty.$$

$$\mathcal{F}g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} f(\tfrac{x}{T}) e^{-2\pi i x\omega} dx \overset{\frac{x}{T}=y}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} f(y) e^{-2\pi i Ty\omega} T \, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2\pi i y T\omega} dy = \mathcal{F}f(T\omega)$$

$\operatorname{sop} \mathcal{F}f \subset [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \Leftrightarrow \mathcal{F}f(\omega) = 0$ si $|\omega| > \frac{T}{2} \Leftrightarrow \mathcal{F}f(T\omega) = 0$

$\Leftrightarrow |T\omega| > \frac{T}{2} \Leftrightarrow \mathcal{F}g(\omega) = \mathcal{F}f(T\omega) = 0$ si $|\omega| > \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\operatorname{sop} \mathcal{F}g \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Como $g \in PW_1(\mathbb{R})$, por el Teor ~~W~~-S

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k) \frac{\operatorname{sen} \pi(x-k)}{\pi(x-k)}$$

en $L^2(\mathbb{R})$ y uniformemente en $\mathbb{R}$. Entonces $\quad g(x) = \frac{1}{T} f\left(\frac{x}{T}\right)$

$$f(x) = T g(Tx) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k) \frac{\operatorname{sen} \pi(Tx-k)}{\pi(Tx-k)} =$$

$$= \cancel{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cancel{T}} f\left(\frac{k}{T}\right) \frac{\operatorname{sen} \pi(Tx-k)}{\pi(Tx-k)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{T}\right) \frac{\operatorname{sen} \pi(Tx-k)}{\pi(Tx-k)}$$

en $L^2(\mathbb{R})$ y uniformemente en $\mathbb{R}$.

## 2.5. PROCESADO DE SEÑALES FINITAS

Tomaremos $T=1$; $S_N$ es el conjunto de muestras de tamaño $N$, es decir, $f:\{0,1,\dots,N-1\}\to\mathbb{C}$. Este espacio es isomorfo a $\mathbb{C}^N$ y por tanto tiene dimensión $N$. $S_N$ es un espacio de Hilbert con

$$\langle f,g\rangle=\sum_{n=0}^{N-1} f(n)\overline{g(n)}$$

**Proposición 2.5.1.** Sea $e_k:\{0,1,\dots N-1\}\to\mathbb{C}$ dada por $e_k(n)=\frac{1}{\sqrt{N}}e^{\frac{2\pi i k n}{N}}$, $n=0,\dots,N-1$, $k=0,\dots,N-1$. El conjunto $\{e_k\}_{k=0}^{N-1}$ es base o.n. de $S_N$

P/ $$\langle e_k,e_m\rangle=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{\sqrt{N}}e^{\frac{2\pi i k n}{N}}\frac{1}{\sqrt{N}}e^{-\frac{2\pi i m n}{N}}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}e^{\frac{2\pi i n(k-m)}{N}}$$

Si $k=m$, $\langle e_k,e_k\rangle=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}1=\frac{1}{N}\cdot N=1$

Si $k\neq m$, $\langle e_k,e_m\rangle=\frac{1}{N}\left[1+e^{\frac{2\pi i(k-m)}{N}}+e^{\frac{4\pi i(k-m)}{N}}+\dots\right.$
$$\left.+e^{\frac{2\pi i(N-1)(k-m)}{N}}\right]=\frac{e^{\frac{2\pi i(N-1)(k-m)}{N}}\cdot e^{\frac{2\pi i(k-m)}{N}}-1}{e^{\frac{2\pi i(k-m)}{N}}-1}$$
$$=\frac{e^{2\pi i(k-m)}-1}{e^{\frac{2\pi i(k-m)}{N}}-1}=\frac{1-1}{\dots}=0.$$

Como $S_N$ tiene dimensión $N$ y $\{e_k\}_{k=0}^{N-1}$ tiene $N$-elementos, ya es base.

**Definición 2.5.2** $f\in S_N$, su transformada discreta de Fourier (DFT) es

$$\hat{f}(k)=\langle f,e_k\rangle=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=0}^{N-1}f(n)e^{-\frac{2\pi i k n}{N}},\quad k=0,1,\dots,N-1$$

$f \in S_N$ ; como $\{e_k\}_{k=0}^{N-1}$ es b.o.n de $S_N$, $f = \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k e_k$

donde

$$\langle f, e_m \rangle = \langle \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k e_k , e_m \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k \langle e_k, e_m \rangle = \lambda_m$$

Por tanto,

$$f = \sum_{k=0}^{N-1} \langle f, e_k \rangle e_k = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}(k) e_k$$

$$\Leftrightarrow \quad f(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}(k) e^{\frac{2\pi i k n}{N}} \quad , n = 0,1,\dots,N-1$$

Esta es la inversa de DFT (IDFT)

La identidad de Parseval es

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \langle \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}(k) e_k , \sum_{\ell=0}^{N-1} \hat{f}(\ell) e_\ell \rangle$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} \hat{f}(k) \overline{\hat{f}(\ell)} \langle e_k, e_\ell \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} |\hat{f}(k)|^2$$

---

(DFT) $\quad \hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-\frac{2\pi i k n}{N}} \quad , k = 0,1,2,\dots N-1$

Operaciones : N productos (de nºs complejos) / N-1 sumas / 1 producto $\times \frac{1}{\sqrt{N}}$ } 2N operaciones

Para cada k hay que hacer 2N operaciones

Puesto que hay que calcular N coef $\hat{f}(k)$, tendremos

$$(2N)N = 2N^2 \text{ operaciones}$$

- $N = 10^6$ ; El computador hace $10^9$ operaciones por segundo

¿Cuánto tardaría la computadora en calcular DFT de esta señal?

$$\frac{2\times(10^6)^2}{10^9} \text{ seg} = \frac{2\times 10^{12}}{10^9} = 2\times 10^3 = 2000 \text{ seg} \approx 33 \text{ minutos}$$

Veremos un algoritmo, que se llama Fast Fourier Transform (FFT), con el cual el nº de operaciones necesarias para calcular DFT de $f \in S_N$ es $\simeq \frac{3}{2} N \log_2 N$

Preg: ¿Cuanto tarda la computadora en calcular DFT de $f \in S_N$ usando FFT?

$N = 10^6 = 1000^2 \simeq 2^{20}$ ; La compu hace $10^9 = 1000^3 \simeq 2^{30}$ oper/seg. Tarda:

$$\frac{\frac{3}{2} 2^{20} \log_2 2^{20}}{2^{30}} = \frac{3}{2} \frac{1}{2^{10}} \cdot 20 = \frac{30}{1024} = 0'03 \text{ seg}$$

---

## La transformada rápida de Fourier
## Fast Fourier Transform (FFT)

$N = 2^\ell$, $f \in S_N$

Ejercicio 2.5.1 Probar que $\hat{f}(2k) = \frac{1}{\sqrt{N/2}} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} {}^{o}f(n) e^{-\frac{2\pi i k n}{N/2}}$

donde ${}^{o}f(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} [f(n) + f(n + \frac{N}{2})]$ es una señal de $S_{N/2}$.

S/ $\hat{f}(2k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-\frac{2\pi i (2k) n}{N}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} f(n) e^{-\frac{2\pi i (2k) n}{N}} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=N/2}^{N-1} f(n) e^{-\frac{2\pi i (2k) n}{N}}$$

$n = m + \frac{N}{2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} f(n) e^{-\frac{2\pi i (k) n}{N/2}} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f(m + \frac{N}{2}) e^{-\frac{2\pi i k (m + N/2)}{N/2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [f(n) + f(n + \frac{N}{2})] e^{-\frac{2\pi i k n}{N/2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} {}^{o}f(n) e^{-\frac{2\pi i k n}{N/2}}$$

---

Ejercicio 2.5.2 Probar que $\hat{f}(2k+1) = \frac{1}{\sqrt{N/2}} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} {}_1f(n)\, e^{-\frac{2\pi i k n}{N/2}}$

donde ${}_1f(n) = e^{-\frac{2\pi i n}{N}} \frac{1}{\sqrt{2}} [f(n) - f(n+N/2)]$ es periódica de periodo $N/2$, e.d. $f \in S_{N/2}$ (una señal)

S/ $\hat{f}(2k+1) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} f(n)\, e^{-\frac{2\pi i (2k+1) n}{N}}$ (separar)

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} f(n)\, e^{-\frac{2\pi i(2k+1)n}{N}} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=N/2}^{N-1} f(n)\, e^{-\frac{2\pi i(2k+1)n}{N}} \quad (n = m + N/2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{-\frac{2\pi i n}{N}} f(n)\, e^{-\frac{2\pi i k n}{N/2}} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f(m+\tfrac{N}{2})\, e^{-\frac{2\pi i(2k+1)(m+\frac{N}{2})}{N}}$$

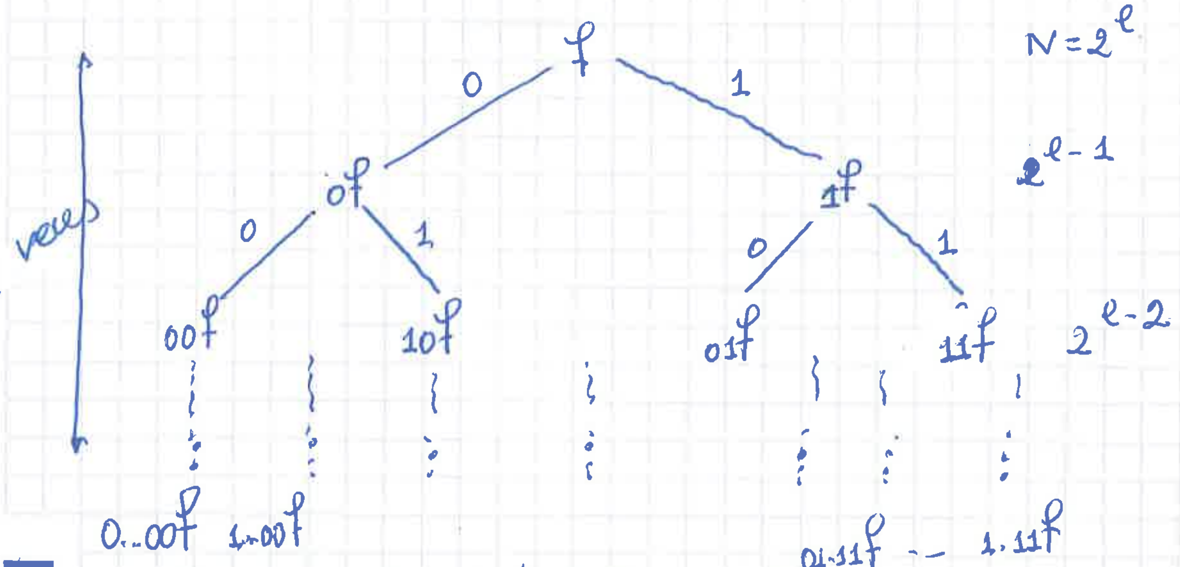
$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{-\frac{2\pi i n}{N}} f(n)\, e^{-\frac{2\pi i k n}{N/2}} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} f(n+\tfrac{N}{2})\, e^{-\frac{2\pi i k n}{N/2}} \underbrace{e^{-2\pi i k}}_{1} \underbrace{e^{-\frac{2\pi i n}{N}}\, e^{-\pi i}}_{-1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{-\frac{2\pi i n}{N}} [f(n) - f(n+\tfrac{N}{2})]\, e^{-\frac{2\pi i k n}{N/2}}$$

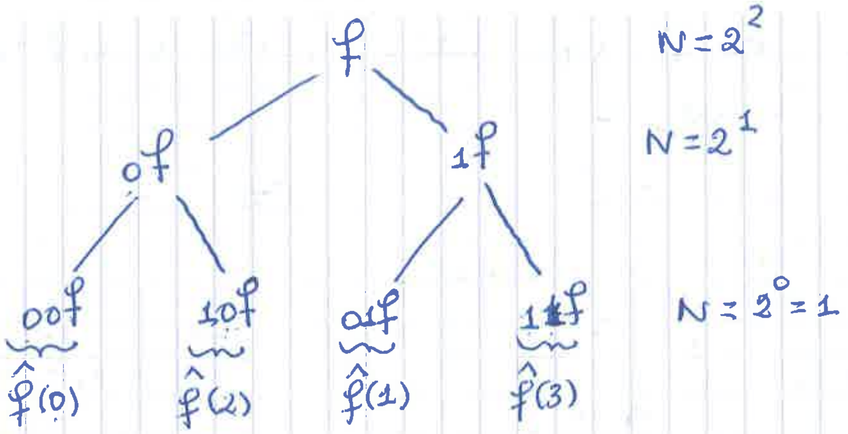
$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} {}_1f(n)\, e^{-\frac{2\pi i k n}{N/2}}$$

---

"La DFT de $f \in S_N$ con $N = 2^l$ se puede calcular haciendo la DFT de dos señales ${}_0f$ y ${}_1f$ de tamaño $\frac{N}{2} = 2^{l-1}$"




Para una señal de tamaño 1, $\hat{f}(0) = f(0)$




$C(N)$ = nº de operaciones para calcular DFT usando FFT de $f \in S_N$

Operaciones para calcular ${}_0f$ : $\frac{N}{2}$ sumas

Operaciones para calcular ${}_1f$ : $\frac{N}{2}$ sumas + $\frac{N}{2}$ productos

$$C(N) = 2C(N/2) + \frac{3N}{2}$$

$$C(2^l) = 2C(2^{l-1}) + \frac{3}{2}2^l = 2\left[2C(2^{l-2}) + \frac{3}{2}2^{l-1}\right] + \frac{3}{2}2^l$$

$$= 2^2 C(2^{l-2}) + 2 \cdot \frac{3}{2} 2^l$$

$$= 2^2\left[2C(2^{l-3}) + \frac{3}{2} \cdot 2^{l-2}\right] + 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2^l$$

$$= 2^3 C(2^{l-3}) + \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot 2^l \overset{l \text{ veces}}{= \cdots\cdots =}$$

$$= 2^l C(1) + \frac{3}{2} l \cdot 2^l \overset{C(1)=0}{=} \frac{3}{2} l \cdot 2^l$$

Entonces, como $N = 2^l$, $\log_2 N = \log_2 2^l = l$

$$\underline{C(N) = \frac{3}{2} N \log_2 N}$$

Ejercicio 2.5.3 Sea $f = (f(0), f(1), f(2), f(3)) = (1,2,3,-1)$ una señal de tamaño 4

(a) Calcular DFT de $f$ directamente

(b) Calcular DFT de $f$ usando FFT

S/ (a) $$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{4}} \sum_{n=0}^{3} f(n)\, e^{\frac{-2\pi i k n}{4}} \quad , k = 0,1,2,3$$

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2}\left[ f(0) + f(1) + f(2) + f(3) \right] = 5/2$$

$$\hat{f}(1) = \frac{1}{2}\left[ f(0) + f(1)\, e^{-\pi i/2} + f(2)\, e^{-\pi i} + f(3)\, e^{-\frac{3\pi i}{2}} \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[ 1 + 2(-i) + 3(-1) + (-1)\, i \right] = \frac{-2-3i}{2}$$

$$\hat{f}(2) = \frac{1}{2}\left[ f(0) + f(1)\, e^{-\pi i} + f(2)\, e^{-2\pi i} + f(3)\, e^{-3\pi i} \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[ 1 + 2(-1) + 3(1) + (-1)(-1) \right] = 3/2$$

$$\hat{f}(3) = \frac{1}{2}\left[ f(0) + f(1)\, e^{-\frac{3\pi i}{2}} + f(2)\, e^{-3\pi i} + f(3)\, e^{-\frac{9\pi i}{2}} \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[ 1 + 2(i) + 3(-1) + (-1)(-i) \right] = \frac{-2+3i}{2}$$

(b)