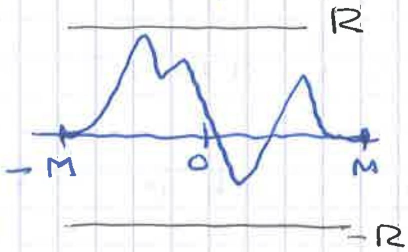
12/07/2021

2.3. TRANSFORMADA DE FOURIER EN $L^2(\mathbb{R})$

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}f$ está bien definida, $\mathcal{F}f \in L^\infty(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}f$ es continua y $\lim_{|\omega|\to\infty} \mathcal{F}f(\omega) = 0$. Ahora queremos extender $\mathcal{F}$ a $L^2(\mathbb{R})$ de manera que $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ y sea una isometría biyectiva; en particular $\|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2$

$$C_c(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f \text{ continua, y } \exists M>0 \text{ tal que } f(x)=0 \quad \forall\, |x|>M \}$$



Ejercicio 2.3.1. Probar que

$$C_c(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$$

S/ $f \in C_c(\mathbb{R})$; $\exists R>0$ t.q. $|f(x)| \leq R \quad \forall x \in [-M, M]$

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx = \int_{-M}^{M} |f(x)|\,dx \leq R\,(2M) < \infty$$

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2} = \left(\int_{-M}^{M} |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \leq R\,(2M)^{1/2} < \infty$$

- $(C_c(\mathbb{R}), \|\ \|_1)$ es denso en $(L^1(\mathbb{R}), \|\ \|_1)$
- $(C_c(\mathbb{R}), \|\ \|_2)$ es denso en $(L^2(\mathbb{R}), \|\ \|_2)$

$$C_c^\infty(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f \in C^\infty \text{ y } \exists [a,b] \subset \mathbb{R} \text{ tal que } f(x)=0 \text{ casi todo } x \notin [a,b] \}$$

- $(C_c^\infty(\mathbb{R}), \|\ \|_1)$ es denso en $(L^1(\mathbb{R}), \|\ \|_1)$
- $(C_c^\infty(\mathbb{R}), \|\ \|_2)$ es denso en $(L^2(\mathbb{R}, \|\ \|_2)$

Estos resultado se prueban usando convolución.

Ejercicio 2.3.2. Sea $f \in C^2(\mathbb{R})$ tal que $f, f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$.

D/ $\mathcal{F}(f'')(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f''(x)\, e^{-2\pi i x \omega}\, dx$

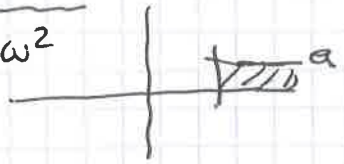
$$\left\{ \begin{array}{l} u = e^{-2\pi i x \omega} \\ du = -2\pi i \omega e^{-2\pi i x}\, dx \\ dv = f''(x)\, dx \\ v = f'(x) \end{array} \right.$$

$$= \underbrace{\cancel{\left[f'(x)\, e^{-2\pi i x \omega} \right]_{-\infty}^{\infty}}}_{0} + \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi i \omega) f'(x)\, e^{-2\pi i x \omega}\, dx$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = e^{-2\pi i x \omega} \\ du = -2\pi i \omega e^{-2\pi i x}\, dx \\ dv = f'(x)\, dx \\ v = f(x) \end{array} \right.$$

$$= (2\pi i \omega) \underbrace{\cancel{\left[f(x)\, e^{-2\pi i x} \right]_{-\infty}^{\infty}}}_{0} + \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi i \omega)^2 f(x)\, e^{-2\pi i \omega x}\, dx$$

$$= -4\pi^2 \omega^2\, \mathcal{F}f(\omega) \Rightarrow |\mathcal{F}f(\omega)| = \frac{|\mathcal{F}(f'')(\omega)|}{4\pi^2 \omega^2}$$



- Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0$

Sabemos que $\|\mathcal{F}(f')\|_\infty \leq \|f'\|_1 < \infty$. Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}f(\omega)|\, d\omega = \int_{-1}^{1} |\mathcal{F}f(\omega)|\, d\omega + \int_{|\omega| \geq 1} |\mathcal{F}f(\omega)|\, d\omega$$

$$\leq \int_{-1}^{1} \|f\|_1\, d\omega + 2\int_{1}^{\infty} \frac{|\mathcal{F}(f'')(\omega)|}{4\pi^2 \omega^2}\, d\omega \leq 2\|f\|_1 + 2\|f''\|_1 \int_{1}^{\infty} \frac{1}{4\pi^2 \omega^2}\, d\omega$$

$$= 2\|f\|_1 + 2\|f''\|_1 \frac{1}{4\pi^2} < \infty \Rightarrow \mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}).$$

Lema 2.3.1.

(a) $\langle f, g \rangle_2 = \langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g \rangle_2 \quad \forall f, g \in C_c^2(\mathbb{R})$

(b) $\|f\|_2 = \|\mathcal{F}f\|_2 \quad \forall f \in C_c^2(\mathbb{R})$

D/ (a) Usar la fórmula de inversión para la TF, es decir

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}g(\omega)\, e^{2\pi i x \omega}\, d\omega \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{Teor } 2.1.6).$$

$$\langle f, g \rangle_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}g(\omega)\, e^{2\pi i x \omega}\, d\omega \right)}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{F}g(\omega)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2\pi i x \omega} dx \right) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{F}g(\omega)}\, \mathcal{F}f(\omega)\, dx$$

$= \langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g \rangle_2$. Para poder intercambiar las integrales necesitamos $(x,\omega) \to f(x) \overline{\mathcal{F}g(\omega)} \cdot e^{-2\pi i x \omega}$ sea de $L^1(\mathbb{R})$:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| |\mathcal{F}g(\omega)| \underbrace{|e^{-2\pi i x \omega}|}_{1} dx\, d\omega \right) =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}g(\omega)| d\omega \right) = \|f\|_1 \|\mathcal{F}g\|_1 < \infty$$

porque $\mathcal{F}g \in L_1$ por el ejercicio 2.3.2.

(b) se deduce de (a) tomando $f = g$. ∎

$f \in L^2(\mathbb{R})$. Como $C_c^2(\mathbb{R})$ son densas en $(L^2(\mathbb{R}), \|\ \|_2)$, existe $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C_c^2(\mathbb{R})$ tales que $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_2 = 0$.
En particular, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $L^2(\mathbb{R})$:

$$\|f_n - f_m\|_2 \le \|f_n - f\|_2 + \|f - f_m\|_2 \xrightarrow{n,m\uparrow\infty} 0$$

Por (b) del lema 2.3.1, $\|\mathcal{F}f_n - \mathcal{F}f_m\|_2 = \|\mathcal{F}(f_n - f_m)\|_2$
$= \|f_n - f_m\|_2 \xrightarrow{n,m\uparrow\infty} 0 \implies \{\mathcal{F}f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $L^2(\mathbb{R})$.
Como $L^2(\mathbb{R})$ es completo, $\exists \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}(f_n)$. Este límite se llama transformada de Fourier de f, $\mathcal{F}f$.

Def 2.3.1 (Transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$)

Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C_c^2(\mathbb{R})$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$, se define

$$\mathcal{F}f := \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}f_n \quad (\text{en } L^2(\mathbb{R}))$$

④

La def. de $\mathcal{F}f$ no depende de la sucesion $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Sea $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C_c^2(\mathbb{R})$ t.q. $\lim_{n\to\infty} \|g_n - f\| = 0$. Hay que probar que

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{F}g_n - \mathcal{F}f\|_2 = 0$$

$$\|\mathcal{F}g_n - \mathcal{F}f\|_2 = \|\mathcal{F}g_n - \mathcal{F}f_n + \mathcal{F}f_n - \mathcal{F}f\|_2 \overset{DT}{\leq} \|\mathcal{F}(g_n - f_n)\|_2 + \|\mathcal{F}f_n - \mathcal{F}f\|_2$$

$$\underset{\text{Lema } 2.3.1}{\overset{g_n - f_n \in C_c^2(\mathbb{R})}{=}} \|g_n - f_n\|_2 + \|\mathcal{F}f_n - \mathcal{F}f\|_2 \leq$$

$$\leq \|g_n - f\|_2 + \|f - f_n\|_2 + \|\mathcal{F}f_n - \mathcal{F}f\|_2 \xrightarrow{n\uparrow\infty} 0$$

Teorema 2.3.2. (Plancherel - Parseval en $L^2(\mathbb{R})$)

$\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$, lineal, biyectiva y satisface

(a) $\|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2 \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R})$ (Plancherel)

(b) $\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g\rangle_2 = \langle f, g\rangle_2 \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R})$ (Parseval)

D/ (b) $\{f_n\} \subset C_c^2(\mathbb{R})$ y $f_n \to f$ $\qquad g_n \overset{\in C_c^2}{\to} g$

$$\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g\rangle_2 = \langle \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}f_n, \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}g_n\rangle_2 \overset{\langle , \rangle \text{ cont}}{=} \lim_{n\to\infty} \langle \mathcal{F}f_n, \mathcal{F}g_n\rangle$$

$$\overset{\text{Lema } 2,3.1}{=} \lim_{n\to\infty} \langle f_n, g_n\rangle \underset{\substack{\langle , \rangle \text{ es} \\ \text{continuo}}}{=} \langle f, g\rangle_2$$

(a) se deduce de (b) con $f = g$.

Falta probar que $\mathcal{F}$ es supraeyectiva. $f \in L^2(\mathbb{R})$, ¿ Elegir $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C_c^2(\mathbb{R})$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ (en $L^2(\mathbb{R})$).

$\{\mathcal{F}^{-1}f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $L^2(\mathbb{R})$. Como $L^2(\mathbb{R})$ es completo, $\exists\, g \in L^2(\mathbb{R})$ t.q.

$$g = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}^{-1}f_n \quad (\text{en } L^2(\mathbb{R}))$$

$$\mathcal{F}g = \mathcal{F}(\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}^{-1} f_n) \overset{\mathcal{F}\text{ cont}}{=} \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1} f_n) = \lim_{n\to\infty} f_n = f.$$

NOTA: Algunos autores usan la definición $\mathcal{F}f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\omega} dx$.
En este caso la fórmula de Plancherel es

$$\| \mathcal{F}f \|_2 = (2\pi) \| f \|_2$$

Exercise 2.3.3: Probar que si $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\lim_{N\to\infty} \int_{|x|\geq N} |f(x)|^2 dx = 0$

S/ $\|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} |f(x)|^2 dx \Rightarrow$

$$\lim_{N\to\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx - \int_{-N}^{N} |f(x)|^2 dx \right] = 0 \iff$$

$$\lim_{N\to\infty} \int_{|x|\geq N} |f(x)|^2 dx = 0$$

Prop 2.3.3. $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{F}f(\omega) = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} f(x) e^{-2\pi i x\omega} dx \quad (\text{en } L^2(\mathbb{R})) \\ \text{y} \\ f(x) = \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} \mathcal{F}f(\omega) e^{2\pi i x\omega} d\omega \quad (\text{en } L^2(\mathbb{R})) \end{array}}$$

D/ Sea $f_N = f \cdot \chi_{[-N,N]} \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ (Cauchy-Schwartz)
y $\|f - f_N\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f_N(x)|^2 dx = \int_{|x|\geq N} |f(x)|^2 dx \xrightarrow[\text{Ej } 2.3.2]{N\to\infty} 0$

$$\|\mathcal{F}f_N - \mathcal{F}f\|_2 = \|\mathcal{F}(f_n - f)\|_2 \overset{\text{Plancherel}}{=} \|f_n - f\| \xrightarrow{N\to\infty} 0.$$

La otra parte se prueba de manera similar.

2.3.1. FORMULA DE SUMACIÓN DE POISSON

Esta fórmula relaciona la función 1-periódica $F(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$, $f \in L^1(\mathbb{R})$, con la serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(k)\, e^{2\pi i k x}$.

<u>Ejercicio 2.3.4</u> $f \in L^1(\mathbb{R})$. Probar que la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$ converge en $L^1([0,1])$ a una función $F \in L^1([0,1])$ y F es 1-periódica.

S/ Basta probar que si $F_N(x) := \sum_{n=-N}^{N} f(x+n)$, $N \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{F_N\}_{N\geq 1}^{\infty}$ es de Cauchy en $L^1([0,1])$: $N<M$

$$\|F_M - F_N\|_{L^1([0,1])} = \int_0^1 \left| \sum_{n=-M}^{M} f(x+n) - \sum_{n=-N}^{N} f(x+n) \right| dx =$$

$$= \int_0^1 \left| \sum_{N<|n|\leq M} f(x+n)dx \right| dx \overset{DT}{\leq} \int_0^1 \Big(\sum_{N<|n|\leq M} |f(x+n)| \Big) dx$$

$$= \sum_{N<|n|\leq M} \int_0^1 |f(x+n)|\,dx \overset{x+n=y}{=} \sum_{N<|n|\leq M} \int_n^{n+1} |f(y)|\,dy$$

$$\leq \int_{N\leq|y|\leq M+1} |f(y)|\,dy \leq \int_{|y|\geq N} |f(y)|\,dy \xrightarrow{N\uparrow\infty} 0$$

Ex. 2.3.3 para $L^1(\mathbb{R})$

Es 1-periódica: $F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$

$$F(x+1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+1+n) \overset{1+n=m}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(x+m) = F(x)$$

<u>Ejercicio 2.3.5</u>. Probar que $\|F\|_{L^1[0,1]} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$

S/ $$\|F\|_{L^1([0,1])} = \lim_{N\to\infty} \|F_N\|_{L^1[0,1]} = \lim_{N\to\infty} \int_0^1 \left| \sum_{n=-N}^{N} f(x+n) \right| dx$$

$$\overset{DT}{\leq} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \int_0^1 |f(x+n)|\,dx \overset{x+n=y}{=} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \int_n^{n+1} |f(y)|\,dy$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N+1} |f(y)|\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|\,dy = \|f\|_1$$

Ejercicio 2.3.6 Probar que para todo $k \in \mathbb{Z}$, $\hat{F}(k) = \mathcal{F}f(k)$ donde $F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$.

S/ $$\hat{F}(k) = \int_0^1 F(x) e^{-2\pi i kx} dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) \right) e^{-2\pi i kx} dx$$

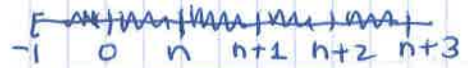
Como $|F(x) e^{-2\pi i kx}| = |F(x)|$ y $F \in L^1([0,1])$, se puede intercambiar $\int_0^1$ y $\sum$:

$$\hat{F}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(x+n) e^{-2\pi i kx} dx \underset{\overline{\overline{}}}{\overset{x+n=y}{=}}$$

$e^{-2\pi i ky} \cdot \underbrace{e^{+2\pi i kn}}_{=1}$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} f(y) e^{-2\pi i k(y-n)} dy$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} f(y) e^{-2\pi i ky} dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2\pi i ky} dy = \mathcal{F}f(k)$$



$f \in L^1(\mathbb{R})$; la serie de Fourier de $F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) \in L^1_p([0,1])$ es $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(k) e^{2\pi i kx}$. Por unicidad (Cor 1.6.7)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(k) e^{2\pi i kx} \quad \text{c.t. } x \in \mathbb{R}.$$

Def 2.3.4. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se dice que tiene decrecimiento moderado si existe $A_f < \infty$ t.q. $|f(x)| \le \frac{A_f}{1+x^2}$ c.t. $x \in \mathbb{R}$. Llamaremos $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de las funciones de decrecimiento moderado.

Ejercicio 2.3.7 Probar que $\mathcal{M}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$

S/ $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$; $\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_f}{1+x^2} dx$

$= A_f \left[\operatorname{arctg} x\right]_{-\infty}^{\infty} = A_f \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = A_f \pi < \infty$

Ejercicio 2.3.8 . $f \in C^2(\mathbb{R})$ y $f, f', f'' \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. La serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(k) e^{2\pi i k x}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a una función continua

Criterio de Weierstrass : $|f_n(x)| \leq M_n \quad \forall x \in D \subset \mathbb{R}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en D (también absolutamente)

S/ $\mathcal{M}(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$. Sabemos $\mathcal{F}(f'')(w) = -4\pi w^2 \mathcal{F}f(w)$ (Ejercicio 2.3.2) $\Rightarrow$ $|\mathcal{F}f(w)| = \frac{|\mathcal{F}(f'')(w)|}{4\pi w^2} \leq \frac{\|f''\|_1}{4\pi w^2}$.

Entonces $|\mathcal{F}f(k) e^{2\pi i k x}| \leq |\mathcal{F}f(k)| \leq \frac{\|f''\|_1}{4\pi k^2} \cdot \forall x \in \mathbb{R}$.

Como $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (converge), por el criterio de Weierstrass $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(k) e^{2\pi i k x}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$. Su límite es continuo porque $\mathcal{F}f(k) e^{2\pi i k x}$ son continuas

Teorema 2.3.5 (Poisson) $f \in C^2(\mathbb{R})$, $f, f', f'' \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Entonces

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(k) e^{2\pi i k x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

D/ Basta observar que ambos lados son funciones continuas.

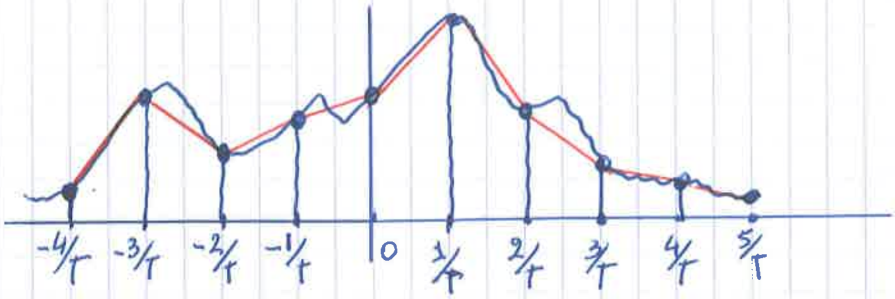
Corolario 2.3.6 : Igual que en Teor 2.3.5,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(k)$$

{Toman $x=0$ en Teor 2.3.5}

2.4 MUESTREO DE SEÑALES

$f(x)$, $x \in \mathbb{R}$; sus muestras en los puntos $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ es la sucesión $\{f(t_n)\}$. Si $t_n = \frac{n}{T}$, $T>0$, $n \in \mathbb{Z}$, las muestras de f son $\{f(n/T)\}_{n=-\infty}^{\infty}$.



Interpolación lineal de una señal

Para poder recuperar f de manera exacta a partir de las muestras $\{f(n/T)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ una condición suficiente es que $\text{sop}\, \mathcal{F}f \subset [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, esto es $\mathcal{F}f(\omega) = 0$ si $\omega \notin [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$.

Def 2.4.1 Una función $f \in L^1(\mathbb{R})$ o en $L^2(\mathbb{R})$ se llama de banda limitada si existe $[a,b] \subset \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{F}f(\omega) = 0$ c.t. $\omega \in \mathbb{R} \setminus [a,b]$. De otra forma

$$\text{sop}\, \mathcal{F}(f) = \overline{\{\omega \in \mathbb{R} : \mathcal{F}f(\omega) \neq 0\}}$$

es compacto

Hay un resultado de Paley-Wiener que dice que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ o $f \in L^2(\mathbb{R})$ es de banda limitada, f se puede extender a una función entera (holomorfa) en todo $\mathbb{C}$. En particular, $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ y podemos tomar sus muestras $\{f(n/T)\}_{n=-\infty}^{\infty}$.