12/07/2021

SECCIÓN 1.6 : Adenda

Ejercicio 1.6.7 $L^1_p([-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f$ es 1-periódica y $\|f\|_{L^1_p} = \int_{-1/2}^{1/2} |f(x)|\,dx < \infty \}$. Prueba que

$$\lim_{t\to 0} \| f(\cdot - t) - f(\cdot)\|_{L^1_p} = 0$$

Sugerencia: Probarlo primero para $g \in L^1_p$ continua y usar densidad

S/ Si $g \in L^1_p$ continua

$$0 \le \lim_{t\to 0} \int_{-1/2}^{1/2} |g(x-t) - g(x)|\,dx \overset{TCDL}{=} \int_{-1/2}^{1/2} (\lim_{t\to 0} |g(x-t) - g(x)|)\,dx = 0$$

El TCDL se puede aplicar porque

$$\int_{-1/2}^{1/2} |g(x-t) - g(x)|\,dx \overset{DT}{\le} \int_{-1/2}^{1/2} |g(x-t)|\,dx + \int_{-1/2}^{1/2} |g(x)|\,dx \overset{x-t=y}{=}$$

$$= \int_{-1/2-t}^{\frac{1}{2}-t} |g(y)|\,dy + \|g\|_{L^1_p} = \int_{-1/2}^{1/2} |g(y)|\,dy + \|g\|_{L^1_p} = 2\|g\|_{L^1_p} < \infty$$

Si $f \in L^1_p$. Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, g \in C([-\frac{1}{2},\frac{1}{2}])$ tal que $\|f-g\|_{L^1_p} < \frac{\varepsilon}{3}$

$$0 \le \int_{-1/2}^{1/2} |f(x-t) - f(x)|\,dx \overset{DT}{\le} \int_{-1/2}^{1/2} |f(x-t) - g(x-t)|\,dx$$

$$+ \int_{-1/2}^{1/2} |g(x-t) - g(x)|\,dx + \int_{-1/2}^{1/2} |g(x) - f(x)|\,dx$$

$$= \|f-g\|_{L^1_p} + \int_{-1/2}^{1/2} |g(x-t) - g(x)|\,dx + \|f-g\|_{L^1_p}$$

Como g es continua, $\exists\, \delta > 0$ t.q. $\forall |t| < \delta$, $\int_{-1/2}^{1/2} |g(x-t) - g(x)|\,dx < \varepsilon/3$. Sustituyendo, si $|t| < \delta$

$$\int_{-1/2}^{1/2} |f(x-t) - f(x)|\,dx \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$ ■

El siguiente teorema es como el Teor 1.6.4, para L^1_p en lugar de L^2_p

Teor 1.6.6. $\boxed{\text{Si } f \in L^1_p([-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]) \text{, entonces } \lim_{N\to\infty} \|\sigma_N f - f\|_{L^1_p} = 0}$

P/ Se prueba como el Teor 1.6.4, usando el ejercicio 1.6.7.

Corolario 1.6.7 (Unicidad para series de Fourier)

$\boxed{\text{Sean } f,g \in L^1_p([-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]) \text{ tal que } \hat{f}(k)=\hat{g}(k) \text{ para todo } k\in\mathbb{Z}\text{. Entonces } f=g \text{ en casi todo punto.}}$

D/ $h = f-g$; $h \in L^1_p([-\frac{1}{2},\frac{1}{2}])$ y $\hat{h}(k) = \hat{f}(k)-\hat{g}(k) = 0$ para todo $k\in\mathbb{Z}$. Ahora

$$\sigma_n h(x) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=-k}^{k}\hat{h}(j)\, e^{2\pi i j x} = 0$$

Teor 1.6.6 $\Rightarrow \lim_{N\to\infty}\|0-h\|_{L^1_p} = 0 \Rightarrow \|h\|_{L^1_p} = 0 \Rightarrow$

$h = 0$ en casi todo punto $\Leftrightarrow$ $f = g$ en casi todo punto.