08/07/2021

Signal processing and wavelets

Prop 1.4.5 (Bessel's inequality): $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ o.n. system in $(\mathbb{H}, <,>)$ Hilbert. Then $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{H}$.

- Probamos que $\tilde{x} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n\rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$ existe en $\mathbb{H}$.

Pregunta: ¿Cuando se tiene que $x = \tilde{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$?

Def 1.4.7. $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es completo en un espacio de Hilbert $(\mathbb{H}, <,>)$ si span $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es denso en $\mathbb{H}$, es decir $\overline{\text{span}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}} = \mathbb{H}$.

$M = \text{span}\{e_n\}_{n=1}^{\infty} = \{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i : k \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{K} \}$.

Si $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es completo $\overline{M} = \mathbb{H} = \overline{M} \oplus M^{\perp} \Rightarrow M^{\perp} = \{0\}$

$\Rightarrow$ si $x \perp e_n \Rightarrow x = 0$ (Conjunto Total)

$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es TOTAL si cuando $x \perp e_n \ \forall n \Rightarrow x = 0$

TOTAL $\Leftrightarrow$ COMPLETO.

Teorema 1.4.8 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ sistema o.n de $(\mathbb{H}, <,>)$ Hilbert.

Son equivalentes

(a) $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ completo ($\Leftrightarrow$ TOTAL)

(b) $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n\rangle e_n$

D/ (a) $\Rightarrow$ (b) Sea $\tilde{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$ que existe por la Prop 1.4.6. Queremos probar que $\tilde{x} = x$. Para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$\langle \tilde{x}, e_m\rangle = \langle \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n, e_m\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle \langle e_n, e_m\rangle$$

$= \langle x, e_m\rangle \Rightarrow \langle \tilde{x} - x, e_m\rangle = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$

$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ TOTAL $\Rightarrow \tilde{x} - x = 0 \Rightarrow \tilde{x} = x$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Sea $x \in \mathbb{H}$ t.q. $\langle x, e_n \rangle = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

$$(b) \Rightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} 0 \cdot e_n = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (TOTAL)} \blacksquare$$

Teorema 1.4.9 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ sistema o.n. en $(\mathbb{H}, \langle , \rangle)$ Hilbert.

Son equivalentes

(a) $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ completo

(c) (Identidad de Plancherel) : para todo $x \in \mathbb{H}$

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$$

(d) (Indentidad de Parseval) : para todo $x, y \in \mathbb{H}$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}$$

D/ (a) $\Rightarrow$ (c)

$$\|x\|^2 = \left\| \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle e_n \right\|^2 \overset{\text{Continua}}{=} \lim_{N \to \infty} \left\| \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle e_n \right\|^2$$

$$\overset{\text{Pitágoras}}{=} \lim_{n \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \| \langle x, e_n \rangle e_n \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$$

(c) $\Rightarrow$ (a) Si $x \in \mathbb{H}$ y $x \perp e_n \Rightarrow \langle x, e_n \rangle = 0$. Por

(c), $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} 0^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ TOTAL

(a) $\Rightarrow$ (d) $x, y \in \mathbb{H}$; Por el Teorema 1.4.8

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n , \sum_{m=1}^{\infty} \langle y, e_m \rangle e_m \right\rangle =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_m \rangle} \langle e_n, e_m \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}$$

(d) $\Rightarrow$ (c) Con $x = y$ en (d)

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle x, e_n \rangle} = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 .$$

1.5. BASES ORTONORMALES

Def 1.5.1. Un conjunto $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ de un espacio de Hilbert $(\mathbb{H}, <,>)$ es una base ortonormal de $\mathbb{H}$ si es un sistema ortonormal y completo.

Por el Teorema 1.4.8, si $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es b.o.n de $\mathbb{H}$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n \quad (\text{en } \mathbb{H}) \quad , x \in \mathbb{H}$$

Los números complejos $\{\langle x, e_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ se llaman coeficientes de Fourier de x con respecto a la b.o.n. $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$

Ejercicio 1.5.1. Para $n=1,2,\dots$, $e_n : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ dada por $e_n(k) = \left\{ \begin{matrix} 1 & \text{si } k=n \\ 0 & \text{si } k \neq n \end{matrix} \right\} = \delta_{n,k}$. Probar que $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es b.o.n de $\ell^2(\mathbb{N})$ con $\langle x, y\rangle_2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$.

S/ $\|e_n\|^2 = \langle e_n, e_n\rangle = 1$ y $\langle e_n, e_m\rangle_2 = 0$, $n \neq m$

$x = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$ e.d. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$. Si $x \perp e_k$ para todo n, $0 = \langle x, e_k\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_k e_k(n) = a_k \Rightarrow x = (a_k)_{k=1}^{\infty}$ $= (0,0,\dots 0) = 0$

Ejercicio 1.5.2. De manera similar $e_n(k) = \delta_{n,k}$ para $e_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ es b.o.n. de $\ell^2(\mathbb{Z}) = \{x = (a_n)_{n=-\infty}^{\infty} : \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}$ con $\langle x, y\rangle_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \overline{y_n}$.

- Si $(\mathbb{H}, <,>)$ es de Hilbert de dimensión finita d es decir, existe $\{e_1, \dots, e_d\}$ base de $\mathbb{H}$ como espacio vect. Si $\{e_1, \dots, e_d\}$ es s.o.n. en $\mathbb{H}$, entonces es base o.n. por el Teor. de Pitágoras $\|x\|^2 = \|\sum_{n=1}^{d} \langle x, e_n\rangle e_n\|^2 = \sum_{n=1}^{d} |\langle x, e_n\rangle|^2$ (Plancherel)

Ejercicio 1.5.3 Sea $\ell^2_N = \{x = (x_1, \dots, x_N) : x_k \in \mathbb{C}\} \approx \mathbb{C}^N$. Prueba que $e_n(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k \neq n \end{cases}$, $n = 1, \dots N$, es una ba o.n de ℓ^2_N con $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i \overline{y_i}$.

S/ $\|e_n\|^2 = 1$ y $\langle e_n, e_m \rangle = 0$, $n \neq m$. Es completo p.q. ℓ^2_N tiene dimension N

Hemos visto que si $[a,b] \subset \mathbb{R}$ con $T = b-a$, Ejerc. 1.4.3 dice

$$\left\{ e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{2\pi i \frac{n}{T} x} : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

es un s.o.n. de $L^2(\mathbb{R})$ con $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)}\, dx$

¿ Es completo ?

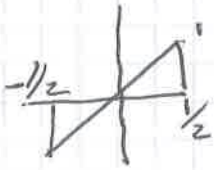
Teorema 1.5.2 El conjunto $\left\{ e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{2\pi i \frac{n}{T} x} : n \in \mathbb{Z} \right\}$ es base o.n. de $L^2([a,b])$ cuando $[a,b] \subset \mathbb{R}$ y $T = b-a$

D/ En la seccion 1.6

Ejercicio 1.5.3: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

$L^2([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$, $\{ e_n(x) = e^{2\pi i n x} : n \in \mathbb{Z} \}$ b.o.n.

Sea $f(x) = x$ en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$; escribir la identidad de Plancherel



$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2$$

$$\|f\|_2^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |x|^2 dx = 2 \int_0^{1/2} x^2 dx = \frac{1}{12}$$

$$\langle f, e_0 \rangle = \int_{-1/2}^{1/2} x \cdot 1\, dx = 0$$

Si $n \neq 0$, $\langle f, e_n \rangle = \int_{-1/2}^{1/2} x\, e^{-2\pi i n x} dx =$

$$= \left[x \frac{e^{-2\pi i n x}}{-2\pi i n} \right]_{-1/2}^{1/2} + \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{+2\pi i n} e^{-2\pi i n x} dx =$$

$$\frac{1}{-2\pi i n} \left[\frac{1}{2} e^{-\pi i n} + \frac{1}{2} e^{+\pi i n} \right] + \frac{1}{4\pi^2 i^2 n^2} \left[e^{-2\pi i n x} \right]_{-1/2}^{1/2}$$

$$= \frac{1}{-2\pi i n} \left[(-1)^n \right] + 0 = \frac{i}{2\pi} \frac{(-1)^n}{n}, \quad n \neq 0$$

Plancherel

$$\frac{1}{12} = \|f\|_2^2 = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2 = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \left| \frac{i}{2\pi} \frac{(-1)^n}{n} \right|^2$$

$$= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{(Euler)}$$

Ejercicio 1.5.4 Sea $f_{n,k}(x) = e^{2\pi i n x} \chi_{[k,k+1)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
Probar que $\{ f_{n,k} : n, k \in \mathbb{Z} \}$ es b.o.n. de $L^2(\mathbb{R})$
con $\langle f, g \rangle_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} \, dx$

S/ $\langle f_{n,k}, f_{n,k} \rangle_2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n x} \chi_{[k,k+1]}(x) \, e^{-2\pi i n x} \chi_{[k,k+1]}(x) \, dx$

$$= \int_k^{k+1} dx = 1$$

Si $(n_1, k_1) \neq (n_2, k_2)$

$$\langle f_{n_1,k_1}, f_{n_2,k_2} \rangle_2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n_1 x} \chi_{[k_1,k_1+1]}(x) \, e^{-2\pi i n_2 x} \chi_{[k_2,k_2+1]}(x) \, dx$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } k_1 \neq k_2, \ [k_1, k_1+1] \cap [k_2, k_2+1] = \emptyset \\ \int_{k_1}^{k_1+1} e^{2\pi i (n_1 - n_2) x} dx = 0 & k_1 = k_2, \ n_1 \neq n_2 \end{cases}$$

Probar Plancherel en $L^2(\mathbb{R})$:

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_k^{k+1} |f(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|f\cdot\chi_{[k,k+1]}\|^2_{L^2([k,k+1])}$$

Por el Teor 1,5.2, $\{e^{2\pi i n x} : n\in\mathbb{Z}\}$ es completo $L^2([k,k+1])$

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\langle f\cdot\chi_{[k,k+1]}, e^{2\pi i n x}\rangle|^2 =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\langle f, \underbrace{\chi_{[k,k+1)}(x)\, e^{2\pi i n x}}_{f_{n,k}}\rangle|^2$$

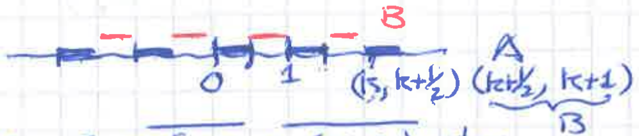
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\langle f, f_{n,k}\rangle|^2$$ (Plancherel en $L^2(\mathbb{R})$)

Por el Teor. 1.4.9., $\{f_{n,k}\}_{n,k}$ es completo.

Ejercicio 1.5.4 Sea $\overset{\neq 0}{g} \in L^2(\mathbb{R})$. Probar que el conjunto $\{g(x-n): n\in\mathbb{Z}\}$ no es completo en $L^2(\mathbb{R})$

Sugerencia Sea $A = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} [n, n+\frac{1}{2})$ y $B = \mathbb{R}\setminus A$.

Definir $f(x) = [\chi_A(x) - \chi_B(x)]\cdot \overline{g(-x)}$. Prueba que $\langle f, g(x-n)\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = 0$



S/
$$\langle f, g(x-n)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} [\chi_A(x)-\chi_B(x)]\cdot \overline{g(-x)}\;\overline{g(x-n)}\,dx$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_k^{k+1/2} 1\cdot \overline{g(-x)}\;\overline{g(x-n)}\,dx + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{k+1/2}^{k+1} (-1)\,\overline{g(-x)}\;\overline{g(x-n)}\,dx$$

$x-n = -y \iff y = -x+n$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_k^{k+1/2} \overline{g(-x)}\;\overline{g(x-n)}\,dx - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{n-k-1/2}^{n-k-1} \overline{g(y-n)}\;\overline{g(-y)}\,(-dy)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_k^{k+1/2} \overline{g(-x)}\;\overline{g(x-n)}\,dx - \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \int_{\ell}^{\ell+1/2} \overline{g(y-n)}\;\overline{g(-y)}\,dy$$

$\overset{=0}{}$

$\ell = n-k-1$;
$n-k-\frac12 = n-k-1+\frac12 = \ell+\frac12$

$\{g(x-n): n\in\mathbb{Z}\}$ no es TOTAL

Teorema 1.5.3 (Riesz-Fisher)

Sea $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ b.o.n. en un espacio de Hilbert $(\mathbb{H}, \langle , \rangle)$. El operador $U: \mathbb{H} \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N})$ dado por $U(x) = \{\langle x, e_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ es un isomorfismo isométrico.

P/ U lineal: $U(\alpha x+\beta y) = \alpha U(x) + \beta U(y)$

$$\{\langle \alpha x+\beta y, e_n\rangle\}_{n=1}^{\infty} = \{\alpha\langle x, e_n\rangle + \beta\langle y, e_n\rangle\}_{n=1}^{\infty} =$$

$$= \alpha\{\langle x, e_n\rangle\}_{n=1}^{\infty} + \beta\{\langle y, e_n\rangle\}_{n=1}^{\infty} = \alpha U(x) + \beta U(y)$$

Isometría: $\|U(x)\|_{\ell^2(\mathbb{N})} = \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{H}$

(Plan) $\|x\|^2 \overset{7}{=} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 = \|U(x)\|^2_{\ell^2(\mathbb{N})}$

Inyectiva: $U(x) = U(y) \Rightarrow x = y$; ~~$U(x-y) = U(x) - U(y) = 0$~~

~~$\Rightarrow x - y = 0$ Basta ver que $U(z) = 0 \Rightarrow z = 0$~~

$U(x) = U(y) \Rightarrow \langle x, e_n\rangle = \langle y, e_n\rangle \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\langle x-y, e_n\rangle = 0$. Como $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ TOTAL $\Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$

Sobreyectiva: sea $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N}) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$.

Sea $y_N = \sum_{n=1}^{N} a_n e_n$. $\{y_N\}_{N=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathbb{H}$:

$M > N$

$$\|y_M - y_N\|^2 = \left\|\sum_{n=1}^{M} a_n e_n - \sum_{n=1}^{N} a_n e_n\right\|^2 = \left\|\sum_{n=N+1}^{M} a_n e_n\right\|^2$$

Pitagoras $\sum_{n=N+1}^{M} |a_n|^2 \xrightarrow[M,N\to\infty]{} 0$ porque $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$.

Como $\mathbb{H}$ es completo, $\exists y \in \mathbb{H}$ t.q. $y = \lim_{N\to\infty} y_N = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$

$$\langle y, e_k\rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n, e_k\right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle e_n, e_k\rangle = a_k \Rightarrow$$

$U(y) = \{\langle y, e_k\rangle\}_{k=1}^{\infty} = \{a_k\}_{k=1}^{\infty} \Rightarrow$ U es sobreyectiva.

1.6 SERIES DE FOURIER

Fourier (1822): Toda función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se puede escribir como $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(2\pi k x) + b_k \operatorname{sen}(2\pi k x)$. (1)

Usando $e^{2\pi i k x} = \cos(2\pi k x) + i \operatorname{sen}(2\pi k x)$, (1) se puede escribir como $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k x}$. (2) ¿Cuáles son los c_k en función de a_k y b_k?

Ejercicio 1.6.1. Hallar los c_k de la serie (2) en función de los a_k y b_k de la serie (1)

S/

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cos(2\pi k x) + i\, c_k \operatorname{sen}(2\pi k x)$$

$$\cos(2\pi k x) = \frac{e^{2\pi k i x} + e^{-2\pi i k x}}{2}, \quad \operatorname{sen}(2\pi k x) = \frac{e^{2\pi i k x} - e^{-2\pi i k x}}{2i}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{e^{2\pi i k x} + e^{-2\pi i k x}}{2} + b_k \frac{e^{2\pi i k x} - e^{-2\pi i k x}}{2i}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2i}\right) e^{2\pi i k x} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2i}\right) e^{-2\pi i k x}$$

$k = -l$

$$c_k = \frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2i} \quad \text{si } k \geq 0$$

$$c_k = \frac{a_{-k}}{2} - \frac{b_{-k}}{2i} \quad \text{si } k < 0$$

Si la serie $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{2\pi i k x}$ converge uniformemente

$$\int_0^1 f(x) e^{-2\pi i m x} dx = \int_0^1 \left(\sum_{k=-\infty} c_k e^{2\pi i k x}\right) e^{-2\pi i m x} dx$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_0^1 e^{2\pi i (k-m) x} dx = c_m \quad \text{porque}$$

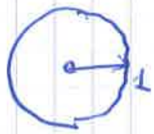
$$\int_0^1 e^{2\pi i (k-m) x} dx = \begin{cases} 1 & \text{si } k = m \\ 0 & \text{si } k \neq m \end{cases}$$

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es periódica, de periodo 1, si $f(x+1) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$$L^1_p([0,1]) = \left\{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f \text{ es 1-periódica y } \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx < \infty \right\}$$

- Si $f \in L^1_p([0,1])$ los coeficientes $c_k = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i k x} dx$ son finitos:

$$|c_k| = \left| \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i k x} dx \right| \leq \int_0^1 |f(x)| \, |e^{-2\pi i k x}| dx =$$



$$= \int_0^1 |f(x)| dx = \|f\|_1 < \infty$$

Ejercicio 1.6.2 Sea $L^2_p([0,1]) = \left\{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \text{1-periódicas y } \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty \right\}$. Probar que

$$L^2_p([0,1]) \subset L^1_p([0,1])$$

S/ $f \in L^2_p([0,1])$ y $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx = \langle |f|, 1 \rangle_2 \overset{C-S}{\leq}$

$$\leq \|f\|_{L^2([0,1])} \|1\|_{L^2([0,1])} = \|f\|_{L^2([0,1])} \left(\int_0^1 1^2 dx \right)^{1/2} = \|f\|_{L^2([0,1])} < \infty$$

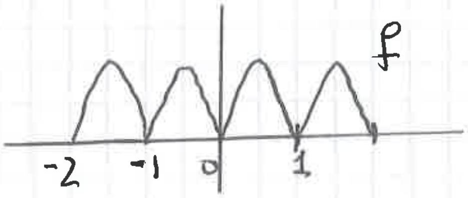
<u>Def 1.6.1</u>. Si $f \in L^1_p([0,1])$ y $k \in \mathbb{Z}$, el <u>coeficiente de Fourier k</u> es

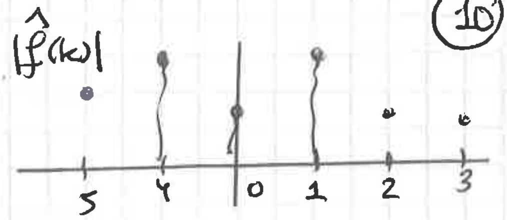
$$\hat{f}(k) := \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i k x} dx.$$

La serie trigonométrica dada por

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x} \qquad (*)$$

se llama <u>serie de Fourier de f</u>.





La convergencia de la serie (*) se entiende en el sentido de las somas parciales simétricas, es decir

$$S_N f(x) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k)\, e^{2\pi i k x}$$

converge cuando $N \to \infty$

Ejercicio 1.6.3. Prueba que $S_N f(x) = \int_0^1 f(t) D_N(x-t)\, dt$

donde $D_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} e^{2\pi i k t} = \begin{cases} 2N+1 & \text{si } t=0 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(2N+1)\pi t}{\operatorname{sen} \pi t} & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$

que se llama núcleo de Dirichlet.

S/ $S_N f(x) = \sum_{k=-N}^{N} \left(\int_0^1 f(t)\, e^{-2\pi i k t}\, dt \right) e^{2\pi i k x} =$

$x-t=s$

$= \int_0^1 f(t) \left(\sum_{k=-N}^{N} e^{2\pi i k(x-t)} \right) dt = \int_0^1 f(t)\, D_N(x-t)\, dt$

$$D_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} e^{2\pi i k t} = e^{-2\pi i N t} + e^{2\pi i(-N+1)t} + \dots +$$

Prog. geom. $r = e^{2\pi i t}$

$$1 + e^{2\pi i t} + e^{2\pi i 2t} + \dots + e^{2\pi i N t}$$

$$= \frac{e^{2\pi i N t} \cdot e^{2\pi i t} - e^{-2\pi i N t}}{e^{2\pi i t} - 1} = \frac{e^{2\pi i (N+1) t} - e^{-2\pi i N t}}{e^{\pi i t}\left(e^{\pi i t} - e^{-\pi i t}\right)}$$

$$= \frac{e^{2\pi i (N+\frac{1}{2}) t} - e^{-2\pi i (+N+\frac{1}{2}) t}}{e^{\pi i t} - e^{-\pi i t}} = \frac{e^{\pi i (2N+1) t} - e^{-\pi i (2N+1) t}}{e^{\pi i t} - e^{-\pi i t}}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} \pi (2N+1) t}{\operatorname{sen} \pi t} \quad \text{(Dirichlet)}$$

$D_N(t)$ es 1-periódica y par

Además, $\int_0^1 D_N(t)\,dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=-N}^{N} e^{2\pi i k t}\right) dt =$

$= \sum_{k=-N}^{N} \int_0^1 e^{2\pi i k t}\,dt = 1$. Pero D_N no está uniformemente acotada en $L^1_p[0,1]$ porque $\int_0^1 |D_N(t)|\,dt \approx \log N$