Signal processing and wavelets

1.3. Proyecciones ortogonales

Ejercicio 1.3.1. (a) Mostrar que si $x_0 \in \mathbb{H}$, el conjunto $\langle x_0 \rangle := \{\alpha x_0 : \alpha \in \mathbb{K}\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{H}$

(b) ¿Es $M = \{ f \in L^2(X,\mu) : |f(x)| \leq 1 \}$ un subespacio vectorial de $L^2(X,\mu)$?

S/ (a) $a, b \in \langle x_0 \rangle$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$a = a_0 x_0$, $b = b_0 x_0$; $\alpha a + \beta b = \alpha(a_0 x_0) + \beta(b_0 x_0)$

$= (\alpha a_0 + \beta b_0) x_0 \in \langle x_0 \rangle$; $\alpha a_0 + \beta b_0 \in \mathbb{K}$

(b) $f_1, f_2 \in M$, y $|f_1(x)| \leq 1$, $|f_2(x)| \leq 1$

$f_1(x) = \chi_{[0,1]}(x)$, $f_2(x) = \chi_{[0,1]}(x)$

$|f_1(x) + f_2(x)| = 2\chi_{[0,1]}(x) \geq 1$

Def 1.3.1 $(\mathbb{H}, \langle , \rangle)$ prehilbert. Un subespacio M de $\mathbb{H}$ es cerrado si $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ con $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ (en $\mathbb{H}$) se tiene que $x \in M$.

Ejercicio 1.3.2. Sea M un subespacio de $\mathbb{H}$. Probar que su cierre $\overline{M}$ es también un subespacio de $\mathbb{H}$.

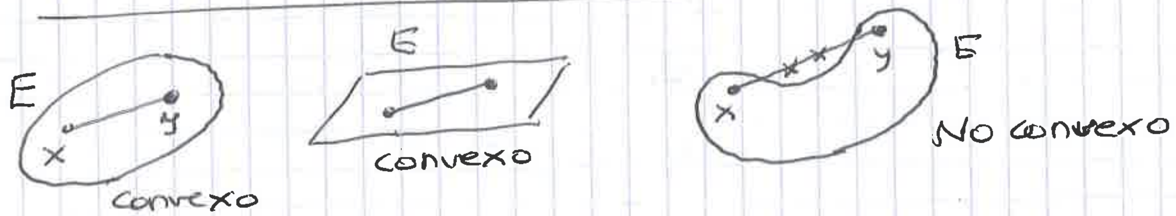
S/ Si $x, y \in \overline{M}$; $x \in \overline{M} \iff \exists \{x_n\} \subset M$ t.q. $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

$y \in \overline{M} \iff \exists \{y_n\} \subset M$ t.q. $\lim_{n\to\infty} y_n = y$

$x + y = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \overset{\in M}{(x_n + y_n)} \Rightarrow x + y \in \overline{M}$

$\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha x = \alpha \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \alpha x_n^{\in M} \Rightarrow \alpha x \in \overline{M}$. ■

Def 1.3.2. E subconjunto de un espacio vectorial $(V, +, \cdot)$; E es convexo si $\forall x, y \in E$ y $0 < t < 1$, el elemento $z_t = (1-t)x + ty$ pertenece a E



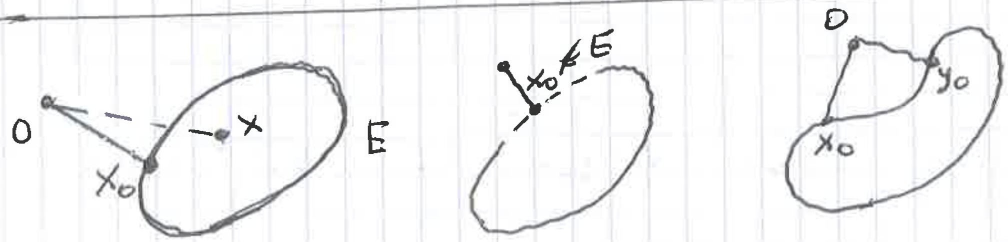
Lema 1.3.3 $(\mathbb{H}, \langle , \rangle)$ prehilbert, $E \subset \mathbb{H}$ subconjunto. El conjunto $E^{\perp} = \{x \in \mathbb{H} : \langle x, y\rangle = 0 \ \forall y \in E\}$ es un subespacio vectorial cerrado de $\mathbb{H}$

NOTA: Ya hemos probado en el ej 1.1.5 que $E^{\perp}$ es un subespacio vectorial

D/ Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E^{\perp}$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ (en $\mathbb{H}$). Entonces si $y \in E$

$$\langle x, y\rangle = \langle \lim_{n\to\infty} x_n, y\rangle \overset{\langle , \rangle \text{ cont}}{=} \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = 0 \quad \blacksquare$$

Teor 1.3.4 $E \neq \emptyset$, cerrado y convexo en un espacio de Hilbert $(\mathbb{H}, \langle , \rangle)$. Existe un solo elemento $x_0 \in E$ tal que $\|x_0\| = \inf_{x\in E} \|x\|$



P/ Ley del paralelogramo:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad , x, y \in \mathbb{H}$$

Sea $\delta = \inf_{x\in E} \|x\|$. Aplicar la ley del paralelogramo a $\frac{x}{2}$ e $\frac{y}{2}$ con $x, y \in E$

$$\left\|\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right\|^2+\left\|\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right\|^2=2\left(\left\|\frac{x}{2}\right\|^2+\left\|\frac{y}{2}\right\|^2\right)$$

$$\frac{1}{4}\|x-y\|^2=\frac{1}{2}\|x\|^2+\frac{1}{2}\|y\|^2-\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2.$$

Como E es convexo, $\frac{x+y}{2}\in E$. Entonces $\delta\leq\left\|\frac{x+y}{2}\right\|$

y

$$\frac{1}{4}\|x-y\|^2\leq\frac{1}{2}\|x\|^2+\frac{1}{2}\|y\|^2-\delta^2$$

$$\|x-y\|^2\leq 2\|x\|^2+2\|y\|^2-4\delta^2 \qquad x,y\in E$$

Puesto que $\delta=\inf_{x\in E}\|x\|$, existe $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\subset E$ tal que $\lim_{n\to\infty}\|y_n\|=\delta$. Probemos que $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathbb{H}$:

n,m

$$0\leq\|y_m-y_m\|^2\leq 2\|y_n\|^2+2\|y_m\|^2-4\delta^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 2\delta^2+2\delta^2-4\delta^2=0$$

Como $\mathbb{H}$ es completo, $\exists\, x_0\in\mathbb{H}$ t.q. $\lim_{n\to\infty}y_n=x_0$ (en $\mathbb{H}$), es decir $\lim_{n\to\infty}\|y_n-x_0\|=0$. Como $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\subset E$ y E es cerrado, $x_0\in E$. Además

$$\|x_0\|=\|\lim_{n\to\infty}y_n\|\overset{\|\,\|\text{ cont}}{=}\lim_{n\to\infty}\|y_n\|=\delta$$

Para probar que es único, supongamos que $y_0\in E$ y $\|y_0\|=\delta$

$$0\leq\|x_0-y_0\|^2\leq 2\|x_0\|^2+2\|y_0\|^2-4\delta^2=2\delta^2+2\delta^2-4\delta^2=0$$

$\Rightarrow x_0=y_0$.

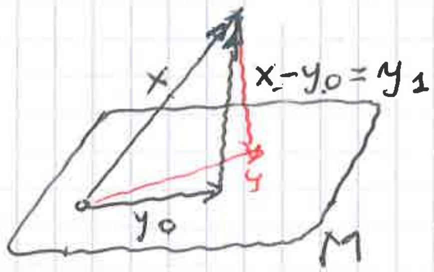
Teorema 1.3.5 M subespacio cerrado de un espacio de Hilbert $(\mathbb{H}, <,>)$. Entonces $\mathbb{H} = M \oplus M^{\perp}$, esto es

$M \cap M^{\perp} = \{0\}$ y $\mathbb{H} = M + M^{\perp}$

P/ Por el lema 1.3.3, $M^{\perp}$ es cerrado.

Sea $x \in M \cap M^{\perp}$; $<x,x> = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow M \cap M^{\perp} = \{0\}$.

Sea $x \in \mathbb{H}$. Por el Teor 1.3.4 aplicado a $E = x - M$ $= \{x - y : y \in M\}$, como E es convexo porque M es un subesp. y es cerrado pq M es cerrado, existe $y_0 \in M$ tal que $\|x - y_0\| = \inf_{y \in M} \|x - y\|$. Sea $y_1 = x - y_0$. Entonces



$$\|y_1\| = \|x - y_0\| \leq \|x - y\| \quad \forall y \in M$$

Hay que probar que $y_1 \in M^{\perp}$. Usar el ejercicio 1.1.7(b)

Para $y \in M$, $y_0 - \lambda y \in M$ cuando $\lambda \in \mathbb{K}$ y

$$\|y_1\| \leq \|x - (y_0 - \lambda y)\| = \|x - y_0 + \lambda y\| = \|y_1 + \lambda y\|$$

$\forall \lambda \in \mathbb{K}$. Por el ejercicio 1.1.7(b), $y_1 \perp y \Rightarrow y_1 \in M^{\perp}$

$$x = y_0 + y_1 \in M + M^{\perp} \qquad \blacksquare$$

Si $x \in \mathbb{H}$ existen $x_1 \in M$ y $x_2 \in M^{\perp}$ únicos tal que $x = x_1 + x_2$. Entonces podemos definir

$$P_M : \mathbb{H} \to M, \quad P_M(x) = x_1$$

$$P_{M^{\perp}} : \mathbb{H} \to M^{\perp}, \quad P_{M^{\perp}}(x) = x_2$$

que se llaman proyecciones ortogonales de $\mathbb{H}$ sobre M y $M^{\perp}$ respectivamente.

Como $P_M x \perp P_{M^\perp} x$ y por Pitágoras

$$\|x\|^2 = \|P_M x + P_{M^\perp} x\|^2 = \|P_M x\|^2 + \|P_{M^\perp} x\|^2$$

Ejercicio 1.3.3. Sea M subespacio cerrado de $(\mathbb{H}, \langle , \rangle)$ Hilbert.
Probar que $P_M : \mathbb{H} \to M$ es lineal, $\|P_M\| = 1$, $P_M \circ P_M = P_M$ y $P_M^* = P_M$ (autoadjunto)

S/ • Si $x, y \in \mathbb{H}$, $P_M(x+y) = P_M(x) + P_M(y)$
• $\alpha \in \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{H}$, $P_M(\alpha x) = \alpha P_M(x)$

$x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2 \Rightarrow x + y = x_1 + x_2 + y_1 + y_2$

$$= \underbrace{(x_1+y_1)}_{\in M} + \underbrace{(x_2+y_2)}_{\in M^\perp} \Rightarrow P_M(x+y) = x_1 + y_1 = P_M(x) + P_M(y)$$

$x = x_1 + x_2$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha x = \alpha(x_1 + x_2) = \underset{\in M}{\alpha x_1} + \underset{\in M^\perp}{\alpha x_2} \Rightarrow$

$P_M(\alpha x) = \alpha x_1 = \alpha P_M(x)$

$$\|P_M\|^2 := \sup_{\|x\|=1} \|P_M(x)\|^2 \leq \sup_{\|x\|=1} \left(\|P_M(x)\|^2 + \|P_{M^\perp}(x)\|^2\right)$$

$\underset{\text{Pitágoras}}{=}$ $\sup_{\|x\|=1} \|x\|^2 = 1 \Rightarrow \|P_M\| \leq 1.$

Sea $x_0 \in M$ con $\|x_0\| = 1$. Entonces $P_M(x_0) = x_0$

$$\|P_M\| \geq \|P_M(x_0)\| = \|x_0\| = 1 \Rightarrow \|P_M\| \geq 1.$$

• $P_M \circ P_M(x) = P_M(\underset{\in M}{P_M(x)}) = P_M(x)$

• P_M^* es el único operador lineal $P_M^* : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ tal que
$\langle x, P_M^* y \rangle = \langle P_M x, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{H}.$

$$\langle x, P_M^* y\rangle \overset{Def}{=} \langle P_M x, y\rangle = \langle P_M x, P_M y + P_{M^\perp} y\rangle =$$

$$= \langle P_M x, P_M y\rangle + \langle P_M x, P_{M^\perp} y\rangle = \langle P_M x, P_M y\rangle$$

$$= \langle P_M x, P_M y\rangle + \langle P_{M^\perp} x, P_M y\rangle =$$

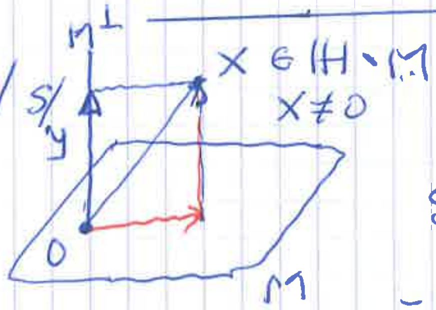
$$= \langle P_M x + P_{M^\perp} x, P_M y\rangle = \langle x, P_M y\rangle \quad \forall x \in H.$$

$$\Rightarrow \langle x, P_M^* y - P_M y\rangle = 0 \quad \forall x \in H \Rightarrow P_M^* y - P_M y = 0$$

$$\Rightarrow P_M^* y = P_M y \Rightarrow P_M^* = P_M$$

Corolario 1.3.6. M subespacio cerrado de $(H, \langle , \rangle)$ Hilbert. Si $M \neq H$, existe $y \in H$, $y \neq 0$, tal que $y \perp M$.

D/ S/



$y = P_{M^\perp} x \Rightarrow y \in M^\perp \; (y \perp M)$

Si $y = 0$, $x = P_M x + P_{M^\perp} x =$

$= P_M(x) + y = P_M(x) \Rightarrow x \in M$,

pero $x \notin M$. Luego $y \neq 0$.

Corolario 1.3.7. M subespacio cerrado de $(H, \langle , \rangle)$ Hilbert. Se tiene $(M^\perp)^\perp = M$

Ejercicio. Demostrar el corolario.

1.4. SISTEMAS ORTONORMALES

- $(V,+,\cdot)$ espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. $\{x_1,\ldots,x_n\} \subset V$ son linealmente independientes (l.i) si cuando $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i=1,\ldots,n$
- $S \subset V$ es l.i si cada subconjunto finito de S es l.i
- $S \subset V$, llamamos span S al conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de elementos de S, es decir

$$\text{span } S = \left\{ \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j : \alpha_j \in \mathbb{K}, x_j \in S, k \in \mathbb{N} \right\}$$

(el subespacio vectorial generado por S)

Def 1.4.1. Un conjunto $\{e_i : i \in I\}$ de un espacio pre-hilbert $(\mathbb{H}, \langle , \rangle)$ se dice sistema ortonormal si

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} = \delta_{i,j} \quad (\text{kronecker})$$

Ejercicio 1.4.1 Probar que todo sistema ortonormal es lin. ind.

S/ $\sum_{i \in F} \alpha_i e_i = 0$, F finito $\Rightarrow \alpha_j = 0 \;\; \forall j \in F$

$$0 = \langle e_j, \sum_{i \in F} \alpha_i e_i \rangle = \sum_{i \in F} \overline{\alpha_i} \langle e_j, e_i \rangle = \overline{\alpha_j} \Rightarrow \alpha_j = 0$$

Ejercicio 1.4.2. $\ell^2(\mathbb{N}) = \{ (x_n)_{n=1}^{\infty} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \}$

espacio de Hilbert, con $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots)$$
$$e_2 = (0, 1, 0, \ldots)$$
$$\vdots$$
$$e_n = (0, 0, \ldots, \underset{n}{1}, 0, \ldots 0 \ldots) \quad \ldots$$

$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un sistema ortonormal en $\ell^2(\mathbb{N})$ porque

$$\langle e_n, e_k \rangle = 0 \text{ si } n \neq k \quad y \quad \langle e_n, e_n \rangle = 1$$

Prop 1.4.2 El conjunto de funciones $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ dado por $e_n(x) = e^{2\pi i n x}$, $x \in \mathbb{R}$, es un sistema ortonormal de $L^2([0,1])$ con $\langle f, g \rangle_2 = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx$

P/ $\langle e_n, e_n \rangle_2 = \int_0^1 e^{2\pi i n x} \cdot e^{-2\pi i n x} dx = \int_0^1 1\,dx = 1$

Si $n \neq m$

$$\langle e_n, e_m \rangle = \int_0^1 e^{2\pi i n x} e^{-2\pi i m x} dx = \int_0^1 e^{2\pi i (n-m)x} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2\pi i (n-m)} e^{2\pi i (n-m)x} \right]_0^1 = \frac{e^{2\pi i (m-n)} - e^0}{2\pi i (n-m)} = \frac{1-1}{2\pi i (m-n)} = 0$$

Ejercicio 1.4.3 Probar que para el intervalo $[a,b]$ de longitud $T = b-a$, el conjunto de funciones $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ dado por

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{2\pi i \frac{n}{T} x}, \quad x \in [a,b]$$

es un sistema ortonormal de $L^2([a,b])$ con

$$\langle f, g \rangle_2 = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

Entregar la solución de este ejercicio en "quinta feira"

Ejercicio 1.4.4. Probar que $\{ e_{(n_1,n_2)} : n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \}$ donde

$$e_{(n_1,n_2)}(x_1,x_2) = e^{2\pi i (x_1 n_1 + x_2 n_2)}, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

es un sistema o.n. de $L^2([0,1]\times[0,1])$

S/ $$\langle e_{(n_1,n_2)}, e_{(n_1,n_2)} \rangle = \int_0^1\int_0^1 e^{2\pi i (x_1 n_1 + x_2 n_2)} e^{-2\pi i (x_1 n_1 + x_2 n_2)} dx_1 dx_2$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 1 \, dx_1 dx_2 = 1$$

$$\langle e_{(n_1,n_2)}, e_{(m_1,m_2)} \rangle = \int_0^1\int_0^1 e^{2\pi i (x_1 n_1 + x_2 n_2)} e^{-2\pi i (x_1 m_1 + x_2 m_2)} dx_1 dx_2$$

$$= \left(\int_0^1 e^{2\pi i (n_1 - m_1) x_1} dx_1\right)\left(\int_0^1 e^{2\pi i (n_2 - m_2) x_2} dx_2\right) = 0$$

si al menos $n_1 \neq m_1$ ó $n_2 \neq m_2$.

Def 1.4.3 Un espacio prehilbert $(\mathbb{H}, \langle , \rangle)$ es separable si contiene un conjunto numerable $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que es denso en $\mathbb{H}$.

Prop 1.4.4. Sea $(\mathbb{H}, \langle , \rangle)$ un espacio prehilbert separable. Todo sistema ortonormal de $\mathbb{H}$ es numerable.

D/ Sea $\{ e_i : i \in I \}$ un sistema ortonormal de $\mathbb{H}$. Si $i \neq j$

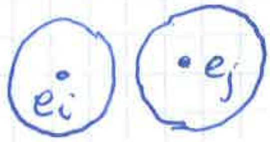
$$\|e_i - e_j\|^2 = \|e_i\|^2 - \langle e_i, e_j \rangle - \langle e_j, e_i \rangle + \|e_j\|^2 = 2$$

$\Rightarrow$ $B(e_i, \frac{1}{2}) \cap B(e_j, \frac{1}{2}) = \emptyset$ donde

$B(x, r) = \{ y \in \mathbb{H} : \|y - x\| < r \}$:

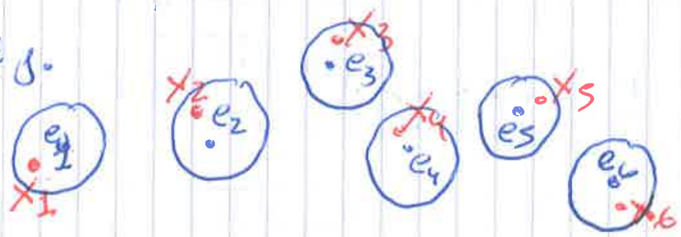
Si $x \in B(e_i, \frac{1}{2}) \cap B(e_j, \frac{1}{2}) \Rightarrow$

$\|x - e_i\| < \frac{1}{2}$ y $\|x - e_j\| < \frac{1}{2}$



$$\sqrt{2} = \|e_i - e_j\| = \|e_i - x + x - e_j\| \overset{DT}{\leq} \|e_i - x\| + \|x - e_j\| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

que es una contradicción. Por tanto $B(e_i, \frac{1}{2}) \cap B(e_j, \frac{1}{2}) = \emptyset$ si $i \neq j$.

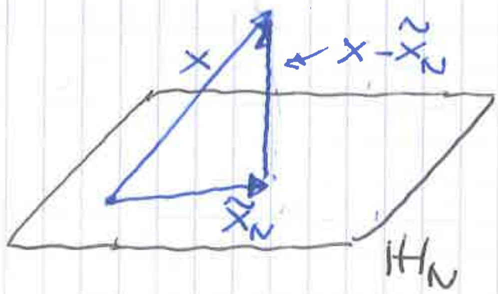


$\mathbb{H}$ es separable, $\exists S$ denso y numerable. Como S es numerable las $B(e_j, \frac{1}{2})$ son numerables. ∎

> Para nosotros todos los espacios de Hilbert serán separables y tendremos sistemas ortonormales numerables.

$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ sistema o.n en $(\mathbb{H}, \langle , \rangle)$ Hilbert. Sea $\mathbb{H}_N = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_N\}$, que es cerrado porque está generado por una cantidad finita de elementos. Por el teorema de aproximación 1.3.4, para cada $x \in \mathbb{H}$ existe $\tilde{x}_N = \mathbb{P}_{\mathbb{H}_N}(x) \in \mathbb{H}_N$ tal que

$$\|x - \tilde{x}_N\| \leq \|x - y\| \quad \forall y \in \mathbb{H}_N$$



y $x - \tilde{x}_N \in \mathbb{H}_N^{\perp}$. Entonces

$$\tilde{x}_N = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n e_n \quad \text{con } \alpha_n \in \mathbb{K}.$$

Para $j = 1, 2, \dots N$

$$0 = \langle x - \tilde{x}_N, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \langle e_n, e_j \rangle =$$

$$= \langle x, e_j \rangle - \alpha_j \Rightarrow \alpha_j = \langle x, e_j \rangle.$$ Por tanto,

$$\tilde{x}_N = \sum_{j=1}^{N} \langle x, e_j \rangle e_j. \quad (*)$$

Como $\tilde{x}_N \perp x-\tilde{x}_N$, por Pitágoras

$$\|x\|^2 = \|(x-\tilde{x}_N)+\tilde{x}_N\|^2 = \|x-\tilde{x}_N\|^2 + \|\tilde{x}_N\|^2$$

$$= \|x-\tilde{x}_N\|^2 + \Big\|\sum_{j=1}^{N} \langle x, e_j\rangle e_j\Big\|^2 \quad \text{Pitágoras}$$

$$= \|x-\tilde{x}_N\|^2 + \sum_{j=1}^{N} |\langle x, e_j\rangle|^2 \underbrace{\cancel{\|e_j\|^2}}_{=1} \geq \sum_{j=1}^{N} |\langle x, e_j\rangle|^2$$

Por tanto,

$$\sum_{j=1}^{N} |\langle x, e_j\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad (**) \qquad \forall N = 1, 2, 3, \ldots$$

Tomando límite cuando $N \to \infty$ se obtiene

Prop 1.4.5 (Desigualdad de Bessel)
Si $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un sistema o.n. de un espacio de Hilbert $(\mathbb{H}, \langle , \rangle)$, para todo $x \in \mathbb{H}$, se tiene

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, e_j\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Pregunta: ¿Es cierto que $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n$ es x?

a) ¿Existe $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n$ en $\mathbb{H}$? SI

b) Si existe el límite, ¿coincide con x? Depende

Prop 1.4.6 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ sistema o.n. de $(\mathbb{H}, \langle , \rangle)$ Hilbert.
Para todo $x \in \mathbb{H}$, existe $\tilde{x} \in \mathbb{H}$ tal que

$$\tilde{x} = \lim_{N\to\infty} \tilde{x}_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n\rangle e_n := \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$$

D/ Como $(\mathbb{H}, \langle , \rangle)$ es completo, es suficiente probar que $\{\tilde{x}_N\}_{N=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Sea $N<M$, se tiene

$$\|\tilde{x}_M - \tilde{x}_N\|^2 \overset{(*)}{=} \left\| \sum_{n=1}^{M} \langle x, e_n\rangle e_n - \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n\rangle e_n \right\|^2$$

$$= \left\| \sum_{n=N+1}^{M} \langle x, e_n\rangle e_n \right\|^2 \overset{\text{Pitágoras}}{=} \sum_{n=N+1}^{M} |\langle x, e_n\rangle|^2 \cancel{\|e_n\|^2}^{=1}$$

$$= \sum_{n=N+1}^{M} |\langle x, e_n\rangle|^2 .$$

Por la desigualdad de Bessel, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 (\leq \|x\|^2)$ converge, para cada $\varepsilon>0$, existe N_0 tal que si $N, M > N_0$ entonces $\sum_{n=N+1}^{M} |\langle x, e_n\rangle|^2 < \varepsilon^2$. Por tanto, $\|\tilde{x}_M - \tilde{x}_N\| < \varepsilon$ para $N, M > N_0$ $\Rightarrow \{\tilde{x}_N\}_{N=1}^{\infty}$ es de Cauchy. ∎