1. Espacios De Hilbert

1.1. Definición y propiedades

Def 1.1.1. $\mathbb{H}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$)
La aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{K}$ es un producto interno si

1. $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{H}$ y $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$
2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad \forall x, y \in \mathbb{H}$
3. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$; $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ (lineal)

$(\mathbb{H}, \langle \,,\, \rangle)$ espacio pre Hilbert. La norma $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Ejemplo 1.1.A $\quad \mathbb{C}^d$, $z = (z_1, \dots, z_d)$, $w = (w_1, \dots, w_d)$

$$\langle z, w \rangle = \sum_{j=1}^{d} z_j \overline{w_j} \quad \text{y} \quad \|z\| = \left(\sum_{j=1}^{d} |z_j|^2 \right)^{1/2}$$

Ejemplo 1.1.B $\quad L^2(\mathbb{R}^d) = \left\{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} : \|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty \right\}$

con

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{g(x)} \, dx$$

$\mathbb{R}^d$ puede sustituirse por un espacio de medida (X, μ); en particular $X = [0, 1]$

Prop 1.1.2. (Cauchy - Schwarz)
$(\mathbb{H}, \langle \,,\, \rangle)$ prehilbert: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$, $x, y \in \mathbb{H}$

Ejercicio 1.1.1. Prueba la desigualdad triangular

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

S/ $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2$
$= \|x\|^2 + 2 \operatorname{Real} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2 |\langle x, y \rangle| + \|y\|^2$
$\leq \|x\|^2 + 2 \|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$

Ejercicio 1.1.2. Desigualdad triangular al revés

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\| \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{H}$$

S/ Probar $\quad -\|x-y\| \leq \|x\|-\|y\| \leq \|x-y\|$

$$\|x\| = \|(x-y)+y\| \leq \|x-y\| + \|y\| \implies$$

$$\|x\|-\|y\| \leq \|x-y\|$$

$$\|y\| = \|(y-x)+x\| \leq \|y-x\| + \|x\| \implies -\|y-x\| \leq \|x\|-\|y\|.$$

Ejercicio 1.1.3. Ley del paralelogramo

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

S/ $\|x\|^2 + 2\,\mathrm{Real}\langle x,y\rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Real}\langle x,y\rangle + \|y\|^2$

$$= 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

Ejercicio 1.1.4. Probar que $\quad \|x\| = \sup\limits_{\|y\|=1} |\langle x,y\rangle|$

S/ $\sup\limits_{\|y\|=1} |\langle x,y\rangle| \leq \sup\limits_{\|y\|=1} \|x\|\|y\| = \|x\|$

$$\sup_{\|y\|=1} |\langle x,y\rangle| \geq \left\langle x, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle = \frac{1}{\|x\|}\|x\|^2 = \|x\|$$

Def 1.1.3. $(\mathbb{H}, \langle\,,\,\rangle)$ prehilbert

a) $x \perp y$ significa $\langle x,y\rangle = 0$

b) $E, F < \mathbb{H}$, $E \perp F$ significa $x \perp y \quad \forall x \in E, \forall y \in F$

c) $E \subset \mathbb{H}$, $E^{\perp} = \{y \in \mathbb{H} : y \perp x \quad \forall x \in E\}$ es el <u>subespacio</u> ortogonal a E

Ejercicio 1.1.5. Probar que $E^{\perp}$ es un subespacio vect. de H

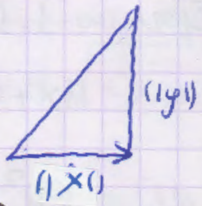
S/ a) Si $x, y \in E^{\perp} \Rightarrow x+y \in E^{\perp}$

b) Si $x \in E^{\perp}$ y $\alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha x \in E^{\perp}$

a) $\forall z \in E$, $\langle x, z\rangle = 0$ y $\langle y, z\rangle = 0 \Rightarrow \langle x+y, z\rangle =$
$= \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle = 0+0=0 \Rightarrow x+y \in E^{\perp}$

b) $\forall z \in E$, $\langle x, z\rangle = 0 \Rightarrow \langle \alpha x, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle = \alpha . 0 = 0$

Ejercicio 1.1.6. (Teorema de Pitágoras):

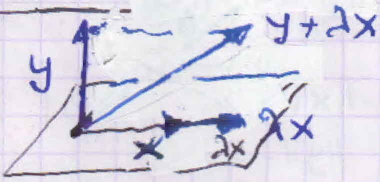


si $x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Por inducción: si $x_1, x_2, \dots, x_n$ son ortogonales entre sí e.d. $\langle x_i, x_j\rangle = 0 \ \forall i \neq j$, entonces

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$$

Ejercicio 1.1.7. Son equivalentes



(a) $x \perp y$

(b) $\|y\| \leq \|\lambda x + y\| \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$

P/ (a) $\Rightarrow$ (b) $x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y\rangle = 0$,

$\|\lambda x+y\|^2 = \langle \lambda x+y, \lambda x+y\rangle = |\lambda|^2\|x\|^2 + 2\,\cancel{\mathrm{Real}(\langle \lambda x, y\rangle)}^{\,0}$
$+ \|y\|^2 \geq \|y\|^2$

(b) $\Rightarrow$ (a) Si $x=0$, es claro que $0 \perp y$. Si $x \neq 0$ sea $\lambda = -\dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\|^2}$ se tiene

$\|y\|^2 \leq \|\lambda x + y\|^2 = |\lambda|^2\|x\|^2 + 2\,\mathrm{Real}(\lambda\langle x, y\rangle) + \|y\|^2$

$= \dfrac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|x\|^4}\|x\|^2 - 2\,\cancel{\mathrm{Real}}\left(\dfrac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|x\|^2}\right) + \|y\|^2 =$

$\leq -\dfrac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|x\|^2} + \|y\|^2 \Rightarrow \langle x, y\rangle = 0$

1.2. Completitud. Espacio de Hilbert

Def 1.2.1 $(\mathbb{H}, \langle , \rangle)$ prehilbert. Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{H}$ es de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.q. $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ $\forall m, n \in \mathbb{N}$.

Def 1.2.2. $(\mathbb{H}, \langle , \rangle)$ prehilbert. La sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{H}$ converge a $x \in \mathbb{H}$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.q. $\|x_n - x\| < \varepsilon$ $\forall n \geq N$. Se escribe $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ (en $\mathbb{H}$)

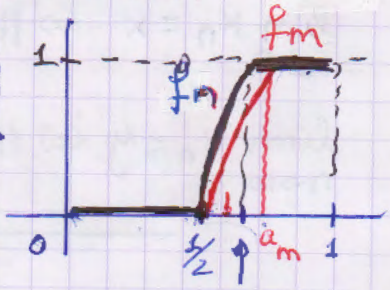
Def 1.2.3 $(\mathbb{H}, \langle , \rangle)$ prehilbert. $(\mathbb{H}, \langle , \rangle)$ es un espacio de Hilbert si toda sucesión de Cauchy de $\mathbb{H}$ converge a un elemento de $\mathbb{H}$. (Decimos que $\mathbb{H}$ es completo)

Ejercicio 1.2.1. En $C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{C} : f \text{ continua}\}$, se define el producto interno $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx$.
¿Es $C([0,1])$ un espacio de Hilbert?

S/ $C([0,1])$ no es completo $\Rightarrow$ NO HILBERT

Sea

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ [n(x - 1/2)]^{1/2} & \text{si } \frac{1}{2} < x < a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } a_n \leq x \leq 1 \end{cases}$$



$m > n$

$a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$

$$\|f_n - f_m\|_2^2 = \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx = \int_{1/2}^{a_n} |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx$$

$$\leq \int_{1/2}^{a_m} |f_n(x)|^2 + \int_{a_m}^{a_n} 1\,dx \leq \int_{1/2}^{a_m} m(x - 1/2)\,dx + \frac{1}{n} - \frac{1}{m}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m} + \frac{1}{m} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } n, m \to \infty$$

La sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $C([0,1])$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1/2 \\ 1 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \notin C([0,1])$$

Ejercicio 1.2.2. $(\mathbb{H}, \langle , \rangle)$ prehilbert

(a) Prueba que si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ (en $\mathbb{H}$) $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$

(b) Prueba que si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ (en $\mathbb{H}$) y $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ (en $\mathbb{H}$), entonces $\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle = \langle x, y\rangle$ (e.d. $\langle , \rangle$ es una función continua).

S/ (a) Sea $\varepsilon > 0$; como $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ (en $\mathbb{H}$), $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\|x_n - x\| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N$. Entonces, por el ej. 1.1.2

$$\big|\, \|x_n\| - \|x\| \,\big| \leq \|x_n - x\| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$

(b) . Tenemos

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n - x, y_n\rangle - \langle x, y - y_n\rangle|$$

$$\stackrel{DT}{\leq} |\langle x_n - x, y\rangle| + |\langle x, y - y_n\rangle| \stackrel{C-S}{\leq} \|x_n - x\|\|y\| + \|x\|\|y - y_n\|$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ \lim_{n\to\infty} y_n = y \Leftrightarrow \|y_n - y\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{array}\right\} \leq 0 \cdot \|y\| + \|x\| \cdot 0 = 0$$

cuando $n \to \infty$

Sea (X, μ) un espacio de medida. Para $f, g : X \to \mathbb{C}$ sea

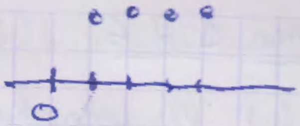
$$\langle f, g\rangle_2 = \int_X f(x)\overline{g(x)}\, d\mu(x)$$

y

$$\|f\|_2 = \left(\int_X |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} = \sqrt{\langle f, f\rangle}$$

¿Es cierto que si $\langle f, f\rangle = 0 \Rightarrow f = 0$? ¿En qué sentido?

$X=\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x\in\mathbb{N} \\ 0 & \text{si } x\in\mathbb{R}-\mathbb{N}\end{cases} \neq 0$

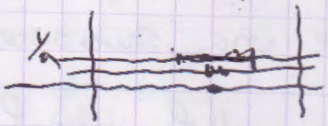


y $\|f\|^2=\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = 0$

Lema 1.2.4. Sea (X,μ) espacio de medida y $F:X\to[0,\infty)$ medible. Si $\int_X F(x)d\mu(x)=0 \Rightarrow F(x)=0$ c.t. $x\in X$

D/ $A=\{x\in X : F(x)>0\}$ y $A_n=\{x\in X : F(x)>\frac{1}{n}\}$.

$A_n\subset A_{n+1}$ y $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$



$$0=\int_X F(x)d\mu(x)\geq \int_{A_n} \tfrac{1}{n} d\mu(x)=\frac{1}{n}\mu(A_n)$$

$\Rightarrow \mu(A_n)\leq n.0=0 \Rightarrow \mu(A_n)=0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$. Como $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $0\leq\mu(A)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)=0 \Rightarrow \mu(A)=0$

---

f,g definidas en X son equivalentes y escribimos $f\sim g$, si $\mu(\{x\in X: f(x)\neq g(x)\})=0$.

$L^2(X,\mu)=\{f:X\to\mathbb{C} : f$ medibles y tal que

$$\|f\|_2 := \left(\int_X |f(x)|^2 d\mu(x)\right)^{1/2}<\infty$$

$\langle f,g\rangle_2=\int_X f(x)\overline{g(x)}\,d\mu(x)$ cuando $f,g\in L^2(X,\mu)$

es un producto interno en $L^2(X,\mu)$.

Lema 1.2.5 (Fatou) (X,μ) espacio de medida y $f_n:X\to[0,\infty)$, $n\in\mathbb{N}$ (no-negativas). Entonces,

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\,d\mu(x)\leq \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n(x)d\mu(x)$$

Teorema 1.2.6 (X,μ) espacio de medida. El conjunto $L^2(X,\mu)$ es completo con la norma inducida por el producto escalar

$$\langle f,g\rangle_2 = \int_X f(x)\overline{g(x)}\,d\mu(x).$$

Por tanto, es un espacio de Hilbert.

D/ Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $L^2(X,\mu)$. Existe una subsucesión $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ tal que

$$\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_2 < \frac{1}{2^i}, \quad i = 1,2,3,\dots$$

Definir, para $k=1,2,3,\dots$

$$g_k(x) := \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)|, \quad g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)|$$

$$\|g_k\|_2 = \left\| \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)| \right\|_2 \le \sum_{i=1}^{k} \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_2$$

$$\le \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} \le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1 \Rightarrow g_k \in L^2(X,\mu)$$

Como $g(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x)$ y $g_k(x) < \infty$ c.t. $x\in X$, se tiene $g(x) < \infty$ c.t. $x \in X$. Entonces, la serie

$$f_{n_1}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} (f_{n+1}(x) - f_n(x))$$

converge absolutamente c.t. $x\in X$. Denotar esta suma como $f(x)$ cuando converge y $f(x)=0$ cuando no converge (medida cero)

$$f_{n_1}(x) + \sum_{i=1}^{k-1} f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x) = \cancel{f_{n_1}(x)} + (\cancel{f_{n_2}(x)} - \cancel{f_{n_1}(x)})$$

$$+ (\cancel{f_{n_3}(x)} - \cancel{f_{n_2}(x)}) \cancel{+} \cdots \cancel{} + (f_{n_k}(x) - \cancel{f_{n_{k-1}}(x)}) = f_{n_k}(x)$$

Es decir, $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$ c.t. $x \in X$

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es Cauchy, $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q.

$\|f_n - f_m\|_2 < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$. $\forall m \geq N$,

$$\int_X |f(x) - f_m(x)|^2 d\mu(x) = \int_X \lim_{k\to\infty} |f_{n_k}(x) - f_m(x)|^2 d\mu(x)$$

$$\overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{k\to\infty} \int_X |f_{n_k}(x) - f_m(x)|^2 d\mu(x) =$$

$$= \liminf_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f_m\|^2 \leq \varepsilon^2 < \infty \quad (*) .$$

Entonces $f - f_m \in L^2(X,\mu) \Rightarrow f = \underbrace{(f - f_m)}_{\in L^2} + \underbrace{f_m}_{\in L^2} \Rightarrow$

$f \in L^2(X,\mu)$. Además, $(*)$ implica que $\|f - f_m\|_2 \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{m\to\infty} f_m = f$ (en $L^2(X,\mu)$). ■

Corolario 1.2.6

(a) $\ell^2(\mathbb{N}) = \{ x = (x_n)_{n=1}^{\infty} : \|x\| = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2)^{1/2} < \infty \}$

con $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n$ es un espacio de Hilbert, porque

tomamos $\mu(\{n\}) = 1$ y $\int_{\mathbb{N}} x \, d\mu(n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_i$.

$\ell^2(\mathbb{N}) = L^2(\mathbb{N}, \mu)$

(b) $\ell^2(\mathbb{Z}) = \{ x = (x_n)_{n=-\infty}^{\infty} : \|x\| = (\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2)^{1/2} < \infty \}$

(c) $\ell^2(\{1, \dots, N\}) = \{ x = (x_1, \dots, x_N) : x_j \in \mathbb{C} \}$

$\cong \mathbb{C}^N$ es completo.

(e) $L^2([a,b])$ es de Hilbert, $\|f\|_2^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx$

Ejercicio 1.2.3. $(H, <,>)$ prehilbert sobre $\mathbb{R}$. Calcular

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$$

S/ $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle$

$$= \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 - [\|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2] = 4\langle x,y\rangle$$

Ejercicio 1.2.4 $(H, <,>)$ prehilbert sobre $\mathbb{C}$. Tenemos

$$4\langle x,y\rangle = \sum_{k=0}^{3} i^k \|x + i^k y\|^2 =$$

$$= \|x+y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x-iy\|^2$$

"Por la desigualdad triangular, $\|\sum_{i=1}^{n} x_i\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$, es decir, la norma de una suma finita es menor o igual que la suma de las normas"

Las integrales son "límites de sumas". Por tanto, es razonable pensar que "la norma de una integral es menor o igual que la integral de las normas", cuando tenga sentido.

Ejercicio 1.2.4 $(H, <,>)$ Hilbert, $y \in H$; definimos $\Lambda_y : H \to \mathbb{C}$, dada por $\Lambda_y(x) = \langle x, y\rangle \in \mathbb{C}$. Probar que Λ_y es lineal y que

$$\|\Lambda_y\|_{op} := \sup_{\|x\|=1} |\Lambda_y(x)| = \|y\|.$$

S/ Lineal es inmediato: $\Lambda_y(\alpha x_1 + \beta x_2) = \langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y\rangle$

$$= \alpha_1 \langle x_1, y\rangle + \alpha_2 \langle x_2, y\rangle = \alpha_1 \Lambda_y(x_1) + \alpha_2 \Lambda_y(x_2).$$

$$\|\Lambda_y\|_{op} = \sup_{\|x\|=1} |\Lambda_y(x)| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x,y\rangle| \leq \sup_{\|x\|=1} \|x\|\,\|y\| = \|y\|$$

$$\|\Lambda_y\|_{op} = \sup_{\|x\|=1} |\langle x,y\rangle| \geq \left|\left\langle \frac{y}{\|y\|}, y\right\rangle\right| = \frac{1}{\|y\|}\langle y,y\rangle = \|y\|$$

Prop 1.2.7 (Desigualdad de Minkowski)
(X,μ), (Y,ν) espacios de medida; $f: X\times Y \to \mathbb{C}$ medible. Entonces

$$\left\| \int_Y f(\cdot,y)\,d\nu(y) \right\|_{L^2(X,\mu)} \leq \int_Y \|f(\cdot,y)\|_{L^2(X,\mu)}\, d\nu(y)$$

D/ Sea $F(x) := \int_Y f(x,y)\,d\nu(y)$ y acotemos $\|\Lambda_F\|_{op}$ que coincide, por el ejercicio 1.2.4 con

$$\|\Lambda_F\|_{op} = \|F\|_{L^2(X,\mu)} = \left\|\int_Y f(\cdot,y)\,d\nu(y)\right\|_{L^2(X,\mu)}$$

Pero

$$\|\Lambda_F\|_{op} = \sup_{\|g\|=1} |\Lambda_F(g)| = \sup_{\|g\|=1} \left|\int_X F(x)\overline{g(x)}\,d\mu(x)\right|$$

$$= \sup_{\|g\|=1} \left|\int_X \left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right)\overline{g(x)}\,d\mu(x)\right| \quad \underline{\text{Fubini}}$$

$$= \sup_{\|g\|=1} \left|\int_Y \left(\int_X f(x,y)\overline{g(x)}\,d\mu(x)\right)d\nu(y)\right| \leq$$

$$\leq \sup_{\|g\|=1} \int_Y \left|\int_X f(x,y)\overline{g(x)}\,d\mu(x)\right| d\mu(y) \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq}$$

$$\leq \sup_{\|g\|=1} \int_Y \|f(\cdot,y)\|_{L^2(x)} \|g\|_{L^2(x)}\,dy = \int_Y \|f(\cdot,y)\|_{L^2(x)} \quad \blacksquare$$