Geometría Afín II:
Sistema de referencia baricéntrico.

1. Sean $A = (1,1,1), B = (1,2,3), C = (2,3,1)$ y $D = (3,1,2)$ cuatro puntos de $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ dados por sus coordenadas cartesianas respecto a un sistema de referencia $\mathcal{R}$.

a) Demuestra que $\mathcal{R}' = \{A, B, C, D\}$ es un sistema de referencia baricéntrico.

b) Calcula las coordenadas cartesianas respecto a $\mathcal{R}$ del baricentro de A, B, C, D.

c) Si $\mathcal{R} = \{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$, halla las coordenadas baricéntricas de O respecto a $\mathcal{R}'$.

2. Demuestra que en $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ los puntos medios de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo.

3. Sean O un punto y $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ dos vectores linealmente independientes. A todo escalar λ, se le asocian los puntos A y B tales que

$$\overrightarrow{OA} = \lambda\overrightarrow{u}, \quad \overrightarrow{OB} = \lambda\overrightarrow{v}.$$

Determina el baricentro de A y B en función de λ.

4. Halla las ecuaciones baricéntricas del plano que contiene a la recta

$$r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = z$$

y al punto $P = (-1, -2, 5)$ en $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$.

5. Sea $\mathbb{A}$ un $\mathbb{K}$-espacio afín de dimensión n y $A_0, \dots A_k \in \mathbb{A}$. Dado $X \in \mathbb{A}$, supongamos que existe $P \in \mathbb{A}$ y $\alpha_0, \dots \alpha_k \in \mathbb{K}$ tales que

$$\left.\begin{array}{c} \overrightarrow{PX} = \alpha_0\overrightarrow{PA_0} + \alpha_1\overrightarrow{PA_1} + \cdots + \alpha_k\overrightarrow{PA_k} \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1. \end{array}\right\} (*)$$

Demostrar:

a) La expresión (*) es válida, con los mismos coeficientes, cambiando P por cualquier $Q \in \mathbb{A}$.

b) Si $\{A_0, \dots, A_k\}$ son afínmente independientes, los valores $\alpha_0, \dots \alpha_k$ son únicos.

6. <u>Cambio de coordenadas baricentricas a cartesianas</u>: Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín de dimensión n, $\mathcal{R}_b = \{A_0, \dots, A_n\}$ un sistema de referencia baricéntrico de $\mathbb{A}$ y $\mathcal{R} = \{\mathcal{O}; \mathcal{B}\}$ un sistema de referencia cartesiano de $\mathbb{A}$. Supongamos que las coordenadas de los puntos A_i con respecto a $\mathcal{R}$ son

$$A_i = (\alpha_{1i}, \dots, \alpha_{ni})_{\mathcal{R}}, \qquad i = 0, \dots, n.$$

Entonces si $X = (\beta_0, \dots, \beta_n)_{\mathcal{R}_b}$, demostrar que se tiene

$$X = \left(\sum_{i=0}^{n} \beta_i\alpha_{1i}, \dots, \sum_{i=0}^{n} \beta_i\alpha_{ni}\right)_{\mathcal{R}}.$$

Es decir, si $X = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)_{\mathcal{R}}$ y denotemos por $C_{\mathcal{R}_b\mathcal{R}} = (\alpha_{ij})$, $i = 0, \dots, n, j = 1, \dots, n$ se tiene:

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = C_{\mathcal{R}_b\mathcal{R}} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

7. Sea $\mathbb{A}$ un $\mathbb{K}$-espacio afín de dimensión n y $p_0, \dots p_r \in \mathbb{A}$. Llamemos $(x_{kj})_{0\leq j\leq n}$ a las coordenadas de cada punto p_k en un sistema de referencia baricéntrico $\mathcal{R}$. Sea la matriz $M = (x_{ij})$, $0 \leq j \leq n$, $0 \leq i \leq r$.

a) Sea $\mathcal{L}(\{p_0, p_1, \dots, p_r\})$ la mínima variedad lineal que contiene a los puntos $p_0, p_1, \dots, p_r$. Demostrar la siguiente igualdad

$$\dim(\mathcal{L}(\{p_0, p_1, \dots, p_r\})) + 1 = \mathrm{rg}(M).$$

b) Supongamos $r = n$. Comprueba que, para que los $n+1$ puntos $p_0, \dots p_n$ sean afínmente independientes es necesario y suficiente que $\det(M) \neq 0$.

8. Cambio de coordenadas baricentricas: Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín de dimensión n, $\mathcal{R}_b = \{A_0, \dots, A_n\}$ y $\mathcal{R}'_b = \{A'_0, \dots, A'_n\}$ dos sistemas de referencia baricéntricos de $\mathbb{A}$. Supongamos que las coordenadas de los puntos A'_i con respecto a $\mathcal{R}_b$ son

$$A'_i = (\alpha_{0i}, \dots, \alpha_{ni})_{\mathcal{R}_b}, \qquad i = 0, \dots, n.$$

Entonces si $X = (\beta_0, \dots, \beta_n)_{\mathcal{R}'_b}$, demostrar que se tiene

$$X = \left(\sum_{i=0}^{n} \beta_i \alpha_{0i}, \dots, \sum_{i=0}^{n} \beta_i \alpha_{ni}\right)_{\mathcal{R}_b}.$$

Es decir, si $X = (\gamma_0, \dots, \gamma_n)_{\mathcal{R}_b}$ y denotemos por $C_{\mathcal{R}'_b\mathcal{R}_b} = (\alpha_{ij})$, $i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, n.$ se tiene:

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = C_{\mathcal{R}'_b\mathcal{R}_b} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

9. En $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, considera los puntos P_0, P_1, P_2, Q_0, Q_1 y Q_2, cuyas coordenadas cartesianas en el sistema de referencia cartesiano $\mathcal{R}_C = \{P_0; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ son las siguientes:

$$\begin{array}{lll} P_0 = (0,0), & P_1 = (1,7), & P_2 = (1,1) \\ Q_0 = (-1,1), & Q_1 = (1,4), & Q_2 = (3,0) \end{array}$$

a) Demuestra que los puntos de $\mathcal{R}' = \{P_0, P_1, P_2\}$ son afínmente independientes. Demuestra que los puntos de $\mathcal{R}'' = \{Q_0, Q_1, Q_2\}$ son afínmente independientes.

b) Halla las coordenadas baricéntricas de P_0, P_1 y P_2 respecto a $\mathcal{R}''$ y las de Q_0, Q_1 y Q_2 respecto a $\mathcal{R}'$.

Considera los sistemas de referencia cartesianos $\mathcal{R}'_C = \{P_0; \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}\}$ y $\mathcal{R}''_C = \{Q_0; \overrightarrow{Q_0Q_1}, \overrightarrow{Q_0Q_2}\}$.

c) Calcula las coordenadas cartesianas de Q_0, Q_1 y Q_2 respecto a $\mathcal{R}'_C$ y las de P_0, P_1 y P_2 respecto a $\mathcal{R}''_C$.

d) Describe las ecuaciones generales de cambio de coordenadas cartesianas entre $\mathcal{R}'_C$ y $\mathcal{R}''_C$.

e) Describe las ecuaciones generales de cambio de coordenadas baricéntricas entre $\mathcal{R}'$ y $\mathcal{R}''$.