ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA
Ingeniería Informática y Matemáticas • Curso 2020–21

Hoja 5

Formas cuadráticas

1. Dadas las siguientes aplicaciones

$$\phi_1 : \mathbb{R}_4[x] \times \mathbb{R}_4[x] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \phi_1(p,q) = p(1)q(-1) + p(-1)q(1).$$
$$\phi_2 : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \phi_2(A,B) = \text{traza}(AMB^t), \quad \text{donde } M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

se pide para $i = 1, 2$:

(i) Probar que ϕ_i es una forma bilineal.

(ii) Hallar la matriz de ϕ_i en la base canónica.

(iii) Determinar el rango y los índices de inercia de la forma cuadrática Q_i asociada a ϕ_i.

2. Para las siguientes aplicaciones

$$\begin{array}{ll} Q_1 : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, & Q_1(A) = \text{Traza}(A^2) \\ Q_2 : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, & Q_2(A) = \det(A) \\ Q_3 : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}, & Q_3(P) = 2P(1)P'(1) \end{array}$$

se pide para $i = 1, 2, 3$:

(i) Probar que Q_i es una forma cuadrática.

(ii) Hallar la matriz de Q_i en la base canónica.

(iii) Determinar el rango de Q_i.

3. Diagonalizar en una base ortonormal las siguientes formas cuadráticas:

$$\begin{aligned} Q_1(x,y) &= -2x^2 + y^2 + 4xy \\ Q_2(x,y,z) &= x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xz + 2yz \\ Q_3(x,y,z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 4xz \\ Q_4(x,y,z) &= xy + yz + zx \end{aligned}$$

Encontrar la signatura de las anteriores formas cuadráticas y estudiar si son equivalentes.

4. Sea V un K-espacio vectorial, $\phi : V \times V \longrightarrow K$ una forma bilineal y $Q : V \longrightarrow K$ la forma cuadrática asociada a ϕ (es decir, $Q(u) = \phi(u,u)$ para $u \in V$). Demostrar que existe una única forma bilineal simétrica $\tilde{\phi} : V \times V \longrightarrow K$ tal que $Q(u) = \tilde{\phi}(u,u)$ para $u \in V$. A la forma bilineal $\tilde{\phi}$ se le conoce con el nombre de forma polar de Q.

5. Estudiar para que valores de $a, b \in \mathbb{R}$ las formas cuadráticas dadas por las siguientes matrices definen un producto escalar en $\mathbb{R}^3$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} a & 2b & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Aplicar el método de completar cuadrados a las siguientes formas cuadráticas:

$$
\begin{aligned}
Q_1(x,y,z) &= x^2+5y^2-2xy+2xz \\
Q_2(x,y,z) &= xy+2xz \\
Q_3(x,y,z) &= x^2-z^2-2xy+xz \\
Q_4(x,y,z) &= 2x^2+y^2+5z^2-2xy+6xz-2yz \\
Q_5(x,y,z) &= 3x^2+2y^2+z^2-6xy+4xz
\end{aligned}
$$

a) Encuentra las ecuaciones de la transformación de $\mathbb{R}^3$ que lleva cada forma cuadrática a su forma normal.

b) Encontrar la signatura de las anteriores formas cuadráticas y estudiar si son equivalentes.

7. Estudiar para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ las siguientes formas cuadráticas son definidas positivas o definidas negativas.

$$
\begin{aligned}
Q_1(x,y,z) &= \alpha x^2+y^2+z^2+2\alpha xy+2\alpha^2 xz+2\alpha yz \\
Q_2(x,y,z) &= \alpha x^2+2xy+\alpha y^2+2\alpha yz+2\alpha z^2 \\
Q_3(x,y,z) &= x^2+\alpha(\alpha-1)y^2+2\alpha xy+2xz+4\alpha yz
\end{aligned}
$$

8. Determinar los valores $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ para los que la forma cuadrática

$$\phi(x,y,z,t) = x^2+3y^2-4z^2+\lambda t^2+2\mu xy$$

es degenerada. Calcular el rango y los índices de inercia de ϕ en función de λ, μ.

9. Sea V un espacio vectorial real y $Q: V \to \mathbb{R}$, $Q': V \to \mathbb{R}$ dos formas cuadráticas. Estudia si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica cada repuesta. (Recuerda que si la afirmación es verdadera hay que dar una demostración mientras que si la afirmación es falsa es suficiente con dar un contraejemplo)

(i) Existe una única forma bilineal $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ tal que $Q(u) = \phi(u,u)$ para $u \in V$.

(ii) Existe una única forma bilineal simétrica $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ tal que $Q(u) = \phi(u,u)$ para $u \in V$.

(iii) Si todos los valores propios de la matriz de Q son positivos, entonces Q es definida positiva.

(iv) Si Q y Q' son definidas positivas, entonces $Q+Q'$ también es definida positiva.

(v) Si Q es indefinida, entonces Q es degenerada.