

Espacios euclídeos y hermíticos III.

Proyecciones. Proyecciones ortogonales. Aplicaciones adjuntas.

1. Calcula la proyección sobre la recta V_1 dada por las ecuaciones $\{x+y+z=0, x-y=0\}$ en la dirección del plano vectorial V_2 generado por los vectores $w_1 = (1, 0, 1)$ y $w_2 = (1, 1, 0)$. Escribe la proyección sobre el plano V_2 en la dirección de la recta V_1 .

2. En \mathbb{R}^4 con el producto escalar usual, determina las ecuaciones de la proyección ortogonal sobre el subespacio vectorial generado por los vectores $(1, 1, -1, 0)$ y $(0, 0, 2, 1)$.

3. Calcula la expresión analítica de la proyección ortogonal sobre la recta de \mathbb{R}^3 (con producto escalar usual) $l = \{x = y = z\}$. Calcula la proyección ortogonal sobre l del vector $(0, 1, 2)$.

4. Encuentra la expresión en coordenadas de la proyección ortogonal (con respecto al producto hermítico usual) sobre la recta $l = \{x - (1+i)z = 0, y = 0\}$.

5. En \mathbb{R}^3 se considera el producto escalar con matriz en la base canónica

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calcula la proyección ortogonal del vector con coordenadas $(1, 1, 1)$ sobre el plano $\{y + z = 0\}$.

6. Sea $V = M_2(\mathbb{C})$ y el producto hermítico $\langle A, B \rangle = \text{traza}(A\overline{B}^T)$. Encuentra la expresión en coordenadas de la proyección ortogonal sobre el plano generado por $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7. Calcula la aplicación adjunta de:

a) $h(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y + 2z, x + 2y + 3z)$, con el producto escalar usual de \mathbb{R}^3 .

b) $h(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 + 2x_2)$ con el producto escalar de \mathbb{R}^2 dado por

$$\phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)$$

8. Considerando el producto escalar usual en \mathbb{R}^3 estudia si la aplicación A es autoadjunta cuando su matriz asociada en la base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 2, 0)\}$ es

$$\begin{pmatrix} -4 & -5 & -6 \\ 4 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

9. Diagonalizar en una base ortonormal cada una de las siguientes aplicaciones demostrando en primer lugar que son autoadjuntas:

a) $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $A(x, y) = (2x + y, 2y + x)$.

b) $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $A(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$.

10. Sea $V = M_2(\mathbb{R})$ con el producto escalar $\langle A, B \rangle = \text{traza}(AB^T)$. Sea $f : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ la aplicación que a cada matriz A le asocia su traspuesta, i.e., $f(A) = A^T$. Demuestra que existe una base ortonormal en la que f es diagonalizable. Encuentra esa base.

11. Sea V un espacio vectorial euclídeo o hermitico de dimensión finita y sean $I_V, f, g : V \rightarrow V$ donde I_V es la identidad y f, g son dos endomorfismos cualesquiera. Demuestra que:

a) $I_V^* = I_V$;

b) $(f^*)^* = f$;

c) $(f + g)^* = f^* + g^*$;

d) $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$;

e) Si f es biyectiva, entonces $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$;

f) $(\text{Im } f)^\perp = \text{Ker}(f^*)$;

g) $(\text{Ker } f)^\perp = \text{Im}(f^*)$.

12. Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{K} de dimensión finita. Se dice que una aplicación lineal $P : V \rightarrow V$ es una proyección si $P^2 = P$. El subespacio $\text{Ker } P$ es la *dirección de la proyección* y el subespacio $\text{Im } P$ es el *subespacio sobre el que se proyecta*.

a) Demuestra que $V = \text{Ker } P \oplus \text{Im } P$.

b) Demuestra que una proyección siempre es diagonalizable.

c) Si V es euclídeo o hermitico, se dice que una proyección es *ortogonal* si $\text{ker } P$ es ortogonal a $\text{Im } P$. Fijado un espacio de proyección $W \subset V$, podemos considerar el conjunto X de todas las proyecciones $P : V \rightarrow V$ con $\text{Im } P = W$. Demuestra que las proyecciones ortogonales minimizan la longitud del vector $u - P(u)$, i.e., si T es la proyección ortogonal sobre W demuestra que

$$\|u - T(u)\| = \min\{\|u - P(u)\| : P \in X\}.$$

d) Demuestra que P es una proyección ortogonal si y sólo si es una proyección autoadjunta. *Sugerencia: Prueba que $\langle Pu, v \rangle = \langle Pu, Pv \rangle$.*