ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA
Ingeniería Informática y Matemáticas • **Curso 2020–21**

Hoja 0

Repaso de Álgebra Lineal

1. Sean $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = 0, z + t = 0\}$ y G el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por $\{(1, 0, 0, 1), (1, -1, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (2, 0, 0, 1)\}$.

a) Demuestra que F es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

b) Calcula una base de F y su dimensión.

c) ¿Cuál es el mínimo número de ecuaciones lineales homogéneas que necesitamos para describir G? Da un ejemplo de sistema lineal homogéneo cuyo conjunto de soluciones sea G. ¿Es este el único sistema con esta propiedad?

d) Calcula una base del subespacio $F + G$.

e) Describe el subespacio $F \cap G$ de dos maneras distintas.

f) Comprueba que se verifica la fórmula de Grassman sobre las dimensiones de los subespacios que aparecen en el problema.

2. Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$U = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \ : \ b + c + d = 0\} \quad \text{y} \quad V = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \ : \ a + b = 0, \ c = 2d\},$$

determina una base y la dimensión de $U, \ V, \ U + V$ y $U \cap V$.

3. Consideremos los vectores $\vec{u}_1 = (1, 1)$ y $\vec{u}_2 = (-1, 1)$ de $\mathbb{R}^2$ y una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$f(\vec{u}_1) = \vec{u}_1 \quad \text{y} \quad f(\vec{u}_2) = -\vec{u}_2. \tag{1}$$

a) Demuestra que $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

b) Decide, razonadamente, si f está completamente determinada por las condiciones descritas en (1).

c) Escribe la matriz de f respecto a la base $\mathcal{B}$.

d) Calcula la imagen de $(1, 3)$ por f.

e) Sea (a, b) un vector cualquiera de $\mathbb{R}^2$. Calcula su imagen por f y expresa sus coordenadas respecto a la base canónica $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^2$.

f) Usando el apartado anterior, calcula las imágenes por f de los vectores de la base canónica.

g) Describe geométricamente el efecto que tiene aplicar f a un vector cualquiera de $\mathbb{R}^2$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por:

$$f(x, y, z) = (0, x - 2y + z).$$

a) Halla la matriz de f en la base canónica.

b) Calcula el núcleo y la imagen de f, y sus dimensiones, y obtén bases para estos subespacios.

c) Halla la matriz de la aplicación f respecto de las bases $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$, y $\mathcal{B}' = \{(1, 1), (0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

5. Sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Describe las imágenes por g de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

b) ¿Cuál es la dimensión de la imagen de g? ¿Es g inyectiva?

c) Describe la imagen de g: fijado un vector $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, da condiciones necesarias y suficientes para que (a, b, c) esté en la imagen de g.

d) Describe los subespacios invariantes por g.

6. Calcula los valores de a, b, c y d sabiendo que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & d \\ 2 & b & -2 \\ 3 & c & 3 \end{pmatrix}$$

admite como autovectores a $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (-1, 1, 0)$ y $\vec{w} = (0, 1, -1)$.

7. Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = C\vec{x} = \vec{0}. \tag{2}$$

Contesta de manera razonada a las siguientes preguntas *sin hacer ningún cálculo*:

a) Sea $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya matriz asociada está dada por C. Al resolver el sistema de ecuaciones (2), ¿qué información obtenemos sobre h?

b) ¿Qué información nos da el número de soluciones del sistema (2) sobre los vectores columna de C?

c) Sea ahora $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ un vector cualquiera. Observa que $C\vec{x} = (a, b, c)^t$ se puede escribir como

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \tag{3}$$

¿Qué significa, en términos de h, que el sistema (3) tenga o no solución?

d) ¿Qué significa, en términos de los vectores columna de C, que el sistema (3) tenga o no solución?