HOJA DE EJERCICIOS 8
Análisis Matemático.
CURSO 2020-2021.

Problema 1. Dada la siguiente 2-forma en $\mathbb{R}^3$:

$$\omega \; = \; dy \wedge dz - 2dz \wedge dx + 3dx \wedge dy,$$

calcular

$$\omega_{(x,y,z)}[(1,-1,0),(2,1,1)] \; .$$

Problema 2. De una 2-forma ω en $\mathbb{R}^3$ se sabe que:

$$\omega_{(1,2,1)}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 2 \; , \quad \omega_{(1,2,1)}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = -4 \; , \quad \omega_{(1,2,1)}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = -4 \; .$$

Calcula $\omega_{(1,2,1)}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$.

Problema 3. Consideramos las siguientes formas diferenciales en $\mathbb{R}^3$:

$$\omega \; = \; dx - zdy \quad , \quad \nu \; = \; (x^2+y^2+z^2)dx \wedge dz + (xyz)dy \wedge dz.$$

Calcular

$$d\omega \; , \; \omega \wedge d\omega \; , \; d\nu \; , \; \omega \wedge \nu \; .$$

Problema 4. Calcular los siguientes productos exteriores:

a) $(dx + dy - dz) \wedge (dx + dy + dz)$.

b) $(xdx + ydy + zdz) \wedge (xdy + ydz + zdx)$.

Problema 5. Demuestra la siguiente identidad:

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} F_j dx_j\Big) \wedge \Big(\sum_{j=1}^{n} G_j dx_j\Big) \; = \; \sum_{1 \le j < k \le n} (F_j G_k - F_k G_j)\, dx_j \wedge dx_k.$$

Problema 6. Hallar la diferencial exterior de las siguientes 1-formas:

(a) $xdy + ydx$;

(b) $(u+v)(du+dv)$;

(c) $f(x)dx + g(y)dy$;

(d) $2xydx + (x^2 - y^2)dy$;

(e) $(x+z)dx + (y-z)dy + (x-y)dz$;

(f) $xydz + xzdy + yzdx$.

Problema 7. Sea $\omega = \sum_{j=1}^{n} P_j dx_j$, donde $P_j = P_j(x_1, \cdots, x_n)$, $1 \le j \le n$. Demuestra que

$$d\omega \; = \; \sum_{1 \le j < k \le n} \left(\frac{\partial P_k}{\partial x_j} - \frac{\partial P_j}{\partial x_k}\right) dx_j \wedge dx_k.$$

Problema 8. Halla la diferencial exterior de las siguientes formas

1. $(x^2 + y + z^2)\, dx \wedge dz + xyz\, dy \wedge dz - \operatorname{sen}(yz)\, dx \wedge dy$,
2. $x_3\, dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 - x_2\, dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + x_3\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 - x_4\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$.

Problema 9. Decimos que una 2-forma ω es **exacta** si existe una 1-forma α tal que $d\alpha = \omega$. Comprueba si las siguientes 2-formas son exactas:

(a) $du \wedge dv$,

(b) $(x^2 + xy + y^2)dx \wedge dy$,

(c) $xdy \wedge dz + ydz \wedge dx - 2zdx \wedge dy$.

<u>Problema</u> 10. Consideramos las 1-formas diferenciales

$$\omega \;=\; xzdy - ydx \quad , \quad \nu \;=\; x^3 dz + dx \; ,$$

y la aplicación $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\phi(s,t) \;=\; (\, \cos s \, , \, \operatorname{sen} s \, , \, t \,) \; .$$

Calcular los siguientes *pullbacks*

$$\phi^*(\omega) \; , \; \phi^*(d\omega) \; , \; \phi^*(\omega \wedge \nu) \; , \; \phi^*(\omega \wedge d\nu) \; .$$

<u>Problema</u> 11. Comprueba que la siguiente 2-forma en $\mathbb{R}^3$

$$\omega \;=\; (1 - z\, e^{yz})\, dx \wedge dy + (1 - y\, e^{yz})\, dx \wedge dz + (2y + z + \operatorname{sen} z)\, dy \wedge dz$$

es cerrada. Concluye que es exacta y halla una 1-forma η tal que $\omega = d\eta$.

<u>Problema</u> 12. A cada campo de vectores $\mathbf{F}$, en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^3$, le asociamos la 1-forma $\mathbf{F}^\flat$ dada por

$$\mathbf{F}^\flat_p(v) \;= < \mathbf{F}(p), v > \qquad \text{para cualesquiera } \; p \in U \; \text{ y } \; v \in \mathbb{R}^3 \; ,$$

y le asociamos la 2-forma $\mathbf{F}^\natural$ dada por

$$\mathbf{F}^\natural_p(v,w) \;=\; \det \big[\, \mathbf{F}(p) \mid v \mid w \,\big] \qquad \text{para cualesquiera } \; p \in U \; \text{ y } \; v, w \in \mathbb{R}^3 \; .$$

Sean $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ y $\mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3)$ dos campos de vectores en U.

a) Expresa las formas $\mathbf{F}^\flat$ y $\mathbf{F}^\natural$ en términos de dx, dy, dz y las funciones F_1, F_2, F_3.

b) Demuestra que $(\mathbf{F} \times \mathbf{G})^\natural = \mathbf{F}^\flat \wedge \mathbf{G}^\flat$.

c) Estudia la relación entre el producto escalar $< \mathbf{F}, \mathbf{G} >$ y la 3-forma $\mathbf{F}^\flat \wedge \mathbf{G}^\natural$.

<u>Problema</u> 13. Demuestra que si $\vec{F}, \vec{G}$ son campos de vectores de clase C^2 en $\mathbb{R}^3$ se cumple

$$\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) \;\;\equiv\;\; < \vec{G} \, , \, \mathbf{rot}\, \vec{F} > - < \vec{F} \, , \, \mathbf{rot}\, \vec{G} >$$
