

HOJA DE EJERCICIOS 7
Análisis Matemático.
CURSO 2020–2021.

Problema 1. Sea

$$\mathbb{T}^2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3^2 + x_4^2 = 1\}$$

Estudiar si M es una subvariedad bidimensional de \mathbb{R}^4 . Hallar una parametrización de M en un entorno de $(1, 0, 0, -1)$. Hallar el espacio tangente a M en $(0, 1, 1, 0)$ exhibiendo una de sus bases.

Problema 2. Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^4$ la curva definida por

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 7 \\ x^2 - 3z^2 + t^2 = 2 \\ 4x^2 - y^2 - z^2 - 2t^2 = -6 \end{cases}$$

Hallar los puntos de Γ en los que $(2, -16, 4, 5)$ es vector tangente.

Problema 3. Considérese la superficie esférica \mathbb{S}^2 descrita mediante la parametrización local

$$\mathbf{X}(u, v) = \left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2} \right)$$

dada por la proyección estereográfica (que proyecta cada punto de $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ en \mathbb{S}^2 por medio de la recta que lo une con el polo norte $N = (0, 0, 1)$).

a) Calcular la matriz diferencial, y comprobar que $\|\mathbf{X}(u, v)\| = 1$ en todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. ¿Hay algún punto (a, b, c) en la esfera de \mathbb{R}^3 que no es la imagen de ningún $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ mediante \mathbf{X} ?

b) Sea Γ la curva en \mathbb{S}^2 obtenida mediante

$$\gamma(u) = \mathbf{X}(u, v) \quad \text{cuando} \quad 3v = u - 2, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Representar gráficamente Γ en \mathbb{S}^2 . *Indicación:* Intentar visualizar la proyección estereográfica.

c) Hallar la ecuación de la recta tangente a Γ en el punto $\left(\frac{10}{27}, \frac{2}{27}, \frac{25}{27}\right)$.

Problema 4. a) Demostrar que

$$\mathbb{H} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 + z^2\}$$

es una superficie regular en \mathbb{R}^3 . Representar gráficamente \mathbb{H} .

b) Demostrar que la función

$$\mathbf{X}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u), \quad \text{donde} \quad u \in \mathbb{R}, v > 0,$$

permite definir parametrizaciones locales de una superficie regular H en \mathbb{R}^3 . Representar gráficamente H .

Problema 5. Hallar los valores extremos de $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Problema 6. Hallar los puntos de la curva determinada por

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 - z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

que están más próximos al origen.

Problema 7. a) Hallar el valor máximo de $\log x + \log y + 3 \log z$ en la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5r^2$ en la que $x > 0, y > 0$ y $z > 0$. Aplicar el resultado para demostrar que para cualesquiera números reales positivos a, b y c se cumple

$$abc^3 \leq 27 \left(\frac{a+b+c}{5} \right)^5.$$

b) Demostrar la desigualdad aritmético-geométrica

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \quad \text{para } a_i \geq 0.$$

Indicación: Escribase $a_i = x_i^2$ y considérese sólo lo que ocurre en la esfera unidad n -dimensional.

Problema 8. a) Calcular los extremos absolutos de la función $f(x, y) = 2x + y^2$ sobre el conjunto

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, y^2 \geq x\}.$$

b) Determinar los extremos absolutos de la función $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - xy$ sobre el conjunto

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{8} \leq 1\}.$$

Problema 9. Sean a y b dos números reales positivos tales que $ab(a+b) = 1$. Calcular el volumen máximo de los sólidos que tienen como base el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$ y $(0, b)$ y cuyas secciones al cortar por planos perpendiculares al plano XY y paralelos al plano YZ son triángulos isósceles de altura 4.

Problema 10. Sea la función

$$f_\alpha(x, y) = x^4 + y^4 + \alpha(x^2 + y^2), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- Calcular los valores de α para los que f_α sólo tiene un máximo relativo, indicando el valor del mismo.
- Determinar el valor del parámetro α_0 de forma que $(5, 5)$ sea un punto crítico para f_α .
- Para el valor calculado en el apartado anterior, determinar el máximo y mínimo absolutos de f_α en

$$x^2 + y^2 = 36.$$
