HOJA DE EJERCICIOS 5
Análisis Matemático.
CURSO 2020–2021.

<u>Problema</u> 1. Consideramos la función $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por la siguiente fórmula:

$$f(x,y) \;\equiv\; \begin{pmatrix} x + e^x \\ y^2 + \operatorname{sen}(x-1) \end{pmatrix} .$$

(a) Demuestra que existe una inversa local $g \equiv (g_1, g_2)$ de f tal que el dominio de g es un abierto $V \ni (1+e, 1)$ y $g(1+e,1) = (1,1)$.

(b) Demuestra que en el abierto V se verifica la siguiente identidad:

$$Dg \;\equiv\; \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+e^{g_1}} & 0 \\ \dfrac{-\cos(g_1 - 1)}{2g_2 \cdot (1+e^{g_1})} & \dfrac{1}{2g_2} \end{bmatrix} .$$

(c) Derivando esa identidad, obtén identidades:

$$\begin{aligned} g_{2uu} &\equiv \text{fórmula}_1\,(g_1, g_2)\ , \\ g_{2uv} &\equiv \text{fórmula}_2\,(g_1, g_2)\ , \\ g_{2vu} &\equiv \text{fórmula}_3\,(g_1, g_2)\ , \\ g_{2vv} &\equiv \text{fórmula}_4\,(g_1, g_2)\ , \end{aligned}$$

entre las derivadas segundas de g_2 y expresiones concretas en g_1 y g_2. Comprueba que las expresiones segunda y tercera son idénticas, aunque se llega a ellas por caminos diferentes.

(d) Calcula explícitamente la matriz hessiana de g_2 en el punto $(1+e, 1)$.

(e) Repite el proceso con g_1.

<u>Problema</u> 2. (a) Prueba que la ecuación

$$x\,y \;=\; \log \frac{x}{y}$$

admite una única solución $y = f(x)$ definida en un entorno de $a = \sqrt{e}$ y verificando $f(\sqrt{e}) = 1/\sqrt{e}$.
(b) Calcula explícitamente los números $f'(a)$ y $f''(a)$.

<u>Problema</u> 3. Sea

$$\begin{cases} u(x,y) = x^2 - 4\,y^2 \\ v(x,y) = 4\,x\,y \end{cases}$$

a) Demostrar que la aplicación $(x,y) \mapsto (u,v)$ es localmente invertible en todo punto distinto del origen.

b) Calcular la matriz de la diferencial de la función inversa de $f(x,y) = \big(u(x,y), v(x,y)\big)$ en $x = 1/2\,,\ y = 1$.

c) Probar que en ningún disco abierto conteniendo al origen existe una inversa de f, ni siquiera no diferenciable.
Indicación: Estudiar la inyectividad.

<u>Problema</u> 4. Si $f \in C^1(\mathbb{R})$ y f' no se anula. Definimos una función vectorial $F(x,y) \equiv \big(u(x,y), v(x,y)\big)$ por las siguientes identidades:

$$\begin{cases} u(x,y) \;\equiv\; f(x) \\ v(x,y) \;\equiv\; -\,y + x\,f(x) \end{cases}$$

Demuestra que F tiene una inversa global (es decir, F es biyectiva de $\mathbb{R}^2$ a un abierto $V \subseteq \mathbb{R}^2$, por lo cual existe $F^{-1} : V \to \mathbb{R}^2$).
Si además $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$, halla explícitamente las derivadas parciales de dicha inversa en el origen.

Problema 5. Estudia si se puede despejar (x,y,z) en términos de (u,v,w) cerca del origen en el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} u = 2\,x + 2\,x^2\,y + 2\,x^2\,z + 2\,x\,y^2 + 2\,x\,y\,z \\ v = x + y + 2\,x\,y + 2\,x^2 \\ w = 4\,x + y + z + 3\,y^2 + 3\,z^2 + 6\,y\,z \end{cases}$$

Problema 6. a) Dada $f \in C^1(\mathbb{R})$ y $\varepsilon > 0$, definimos $F_\varepsilon(x,y) = \big(-y + \varepsilon f(x), x + \varepsilon f(y)\big)$. Sea $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$. Demostrar que para ε suficientemente reducido, existe un $\delta > 0$ tal que en el disco $B_\delta(x_0,y_0)$ la función F_ε es invertible alrededor de (x_0,y_0) con inversa C^1.
b) Sean $F, G : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ tales que para constantes positivas c, λ se verifica:

$$||F(x) - F(y)|| \geq c||x - y||,$$

$$||G(x) - G(y)|| \leq \lambda||x - y||.$$

(observar que no se pide que F ni G sean diferenciables.)
Definimos $H(x) = F(x) + \varepsilon G(x)$. Demostrar que para algún ε, H es inyectiva, y por tanto globalmente invertible.
c) Utilizar el resultado demostrado en el apartado b) para probar que en el apartado a) podemos tomar $\delta = \varepsilon$.

Problema 7. Demuestra que existe una única función $f : U \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$ en un entorno U de $(0,0)$, con $f(0,0) = 0$ y tal que

$$e^{f(x,y)} \;=\; \left(1 + x\,e^{f(x,y)}\right)\left(1 + y\,e^{f(x,y)}\right) \qquad \text{en todos los } (x,y) \in U\,.$$

Problema 8. Estudia si es posible despejar $u(x,y,z)$ y $v(x,y,z)$ en las ecuaciones

$$\begin{cases} x\,y^2 + x\,z\,u + y\,v^2 = 3 \\ x\,y\,u^3 + 2\,x\,v - u^2\,v^2 = 2 \end{cases}$$

en un entorno de $(x,y,z) = (1,1,1)$ y $(u,v) = (1,1)$. En caso afirmativo, calcula $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial x$ y $\partial v/\partial z$ en el punto $(x,y,z) = (1,1,1)$.

Problema 9.

Decimos que una aplicación f es **cerrada** si la imagen directa por f de cualquier cerrado es un cerrado.
Decimos que una aplicación f es **coerciva** si existe una constante $K > 0$ tal que
$||f(x) - f(y)|| \geq K\,||x - y||$ para cualesquiera x, y.

a) Demuestra que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es coerciva y continua entonces es cerrada.
Indicación: prueba que si una sucesión de imágenes $\{f(x_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ es convergente, la original $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.
b) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ abierta y cerrada. Demuestra que es suprayectiva.
c) Demuestra que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$ es abierta pero no cerrada.
d) Demuestra que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ es cerrada. ¿Es f abierta?
Indicación para ver que es cerrada: Si una sucesión de imágenes $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, la original $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también es acotada.

Problema 10. Dibuja los abiertos

$$U_1 = \left\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 1 < x^2 + y^2 < 4\;,\; y > -\frac{1}{2}\,|x| \,\right\}, \qquad U_2 = \left\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 1 < x^2 + y^2 < 4\;,\; y < \frac{1}{2}\,|x| \,\right\}.$$

Halla una inversa del cambio a polares definida en U_1 y otra definida en U_2. Demuestra que, sin embargo, no hay ninguna inversa local continua en $U_1 \cup U_2$.
