

HOJA DE EJERCICIOS 4
Análisis Matemático.
CURSO 2020–2021.

Problema 1. Para cada aplicación $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y el correspondiente conjunto E que se dan, demuestra que hay un único punto $a \in E$ tal que $f(a) = a$. Describe un procedimiento para calcular a con dos decimales de precisión.

- (a) $f(x, y) = \left(\frac{1}{3} \sin x - \frac{1}{3} \cos y + 2, \frac{1}{6} \cos x + \frac{1}{2} \sin y - 1 \right)$, $E = \{|x - 2| \leq 1, |y + 1| \leq 1\}$.
- (b) $f(x, y) = \left(\frac{xe^y}{40}, 1 + \frac{x^2 + 2 \cos y}{10} \right)$, $E = \{|x|, |y - 1| \leq 1\}$.
- (c) $f(x, y) = \left(2 + \frac{\cos(xy)}{7}, \frac{x^2 + y^3}{20} \right)$, $E = \{|x - 2|, |y| \leq 1\}$.
- (d) $f(x, y, z) = \left(\frac{x}{5} \sin y + \frac{z}{5}, 1 + \frac{\cos(x + z)}{3}, \frac{xz}{10} + \frac{1}{2} \right)$, $E = \{|x|, |y - 1|, |z| \leq 1\}$.
- (e) $f(x, y) = \left(\frac{e^{x/3}}{4} + \frac{y^2}{10}, \frac{1}{5} + \frac{x^2 y}{10} \right)$, $E = \{|x|, |y| \leq 1\}$.
-

Problema 2. Sea $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal dada por la matriz

$$A = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Demuestra que A es contractiva en $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ pero no lo es en $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.

Problema 3. Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $f : X \rightarrow X$ una aplicación que cumple lo siguiente:

$$\text{para cualesquiera } x, y \in X, \quad x \neq y \implies d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

- Demuestra que f es continua.
- Demuestra que f tiene un punto fijo $p \in X$ y que tal punto es único.

Indicación: considera la función $X \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x, f(x))$.

¿Es esto también verdad para (X, d) no compacto?

- Demuestra que f no es suprayectiva.

Indicación: considera la función $X \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x, p)$, siendo p el punto fijo.

Problema 4. En este ejercicio exploramos lo que pasa al debilitar alguna hipótesis del teorema de la aplicación contractiva.

- a) (Espacio compacto, $K = 1$). Sea $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ la circunferencia unidad. Da un ejemplo de una $f : C \rightarrow C$ sin punto fijo, pero que cumpla $\|f(p) - f(q)\| = \|p - q\|$ para cualesquiera $p, q \in C$.
- b) (Espacio no completo). Da un ejemplo de una $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ contractiva pero sin punto fijo.
- c) (Dominio y codominio distintos). Explica por qué ninguna aplicación $f : [-1, 1] \rightarrow [2, 4]$ puede tener puntos fijos. Da un ejemplo de una tal f que cumpla $|f(x') - f(x)| = (1/2)|x' - x|$ para cualesquiera $x, x' \in [-1, 1]$.
- d) (Dominio y codominio distintos como espacios métricos). Consideramos en \mathbb{R} las distancias $d(x, y) = |x - y|$, $d'(x, y) = |x - y|/2$. Exhibe una $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sin puntos fijos pero tal que $d'(f(x), f(x')) = (1/2)d(x, x')$, es decir que tenemos una aplicación $f : (\mathbb{R}, d) \rightarrow (\mathbb{R}, d')$ que es de Lipschitz con constante 1/2 pero sin puntos fijos.
-

Problema 5.

Se llama **inversa local** de una función f a la inversa $(f|_U)^{-1} : f(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$ de cualquier restricción suya a un abierto $f|_U$ que sea inyectiva.

Elige una inversa local del cambio a polares $x(r, \theta) = r \cos \theta$, $y(r, \theta) = r \sin \theta$, definida alrededor del punto $x = 2$, $y = -2\sqrt{3}$. Calcula la matriz jacobiana en este punto de la inversa local elegida.

Problema 6. Vamos a hacer uso del siguiente resultado, donde tanto las normas involucradas como las bolas son las euclídeas estándar.

Sean un abierto de $U \subseteq \mathbb{R}^n$, un punto $a \in U$ y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase \mathcal{C}^1 . Supongamos que existen dos números $r, \lambda > 0$ y una matriz **ortogonal** P tales que

$$\text{para todo } x \in \overline{B}(a, r) \text{ y todo } v \in \mathbb{R}^n \text{ se tiene } v^t (Df(x)P) v \geq \lambda \|v\|^2 .$$

Entonces f es inyectiva en $B(a, r)$ y $f(B(a, r)) \supset B(f(a), \lambda r)$.

Se pide dar un radio r de inyectividad alrededor de a y una bola centrada en $f(a)$ en la que esté definida la inversa local con $f(a) \mapsto a$, para cada una de las funciones $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y puntos $a \in \mathbb{R}^2$ siguientes:

[*Indicación:* acuérdate de aprovechar la desigualdad $v_1 v_2 \geq -(v_1^2 + v_2^2)/2$]

a) $a = (4, 2)$ y $f(x, y) = \begin{pmatrix} xy + e^{y/10} \\ 5x - \frac{y^2}{2} \end{pmatrix}$. *Sugerencia:* $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $a = (1, 1)$ y $f(x, y) = \begin{pmatrix} x^3 + \frac{\text{sen } y}{6} \\ \frac{x}{10} - e^y \end{pmatrix}$. *Sugerencia:* $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

c) $a = (0, 1)$ y $f(x, y) = \begin{pmatrix} 5e^y x + \cos y \\ x + y^4 \end{pmatrix}$. *Sugerencia:* $P = I_2$.

Problema 7. Estudia alrededor de qué puntos tienen inversa diferenciable los cambios a cilíndricas y esféricas:

$$\begin{cases} x(r, \varphi, h) = r \cos \varphi \\ y(r, \varphi, h) = r \text{sen } \varphi \\ z(r, \varphi, h) = h, \end{cases} \quad \begin{cases} x(r, \theta, \phi) = r \cos \theta \text{sen } \phi \\ y(r, \theta, \phi) = r \text{sen } \theta \text{sen } \phi \\ z(r, \theta, \phi) = r \cos \phi. \end{cases}$$