

HOJA DE EJERCICIOS 3
Análisis Matemático.
CURSO 2020–2021.

Problema 1. De las siguientes fórmulas dí, razonadamente, cuáles son verdad y cuáles falsas (cerca del origen en \mathbb{R} o en \mathbb{R}^2).

$$\begin{array}{lll} \text{sen } y = O(|y|) & x \text{ sen } y = O(x^2 + y^2) & \text{sen } x = o(|x|) \\ 1 - \cos x = O(x^2) & \frac{x}{\log |x|} = o(|x|) & \frac{x}{\log |x|} = O(|x|^{0.99}) \end{array}$$

Problema 2.

a) Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable y tal que $Df(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Demuestra que f es constante.

Indicación: evalúa f a lo largo de caminos diferenciables.

b) Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable y tal que $Df(x) = 0$ para todo $x \in U$. Fijado un punto $x_0 \in U$, demuestra que el conjunto

$$A = \{x \in U : f(x) = f(x_0)\},$$

es abierto y cerrado relativo de U . Usa eso para concluir que si U es conexo por caminos entonces f es constante. ¿Y si U no es conexo por caminos?

Problema 3. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto convexo y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 . Demuestra que si

$$\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \xi_i \xi_j > 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n \text{ y todo } \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

entonces f es inyectiva.

Indicación: Fijados $x, y \in \mathbb{R}^n$, estudia la función

$$g(t) = \langle f(tx + (1-t)y), x - y \rangle, \quad t \in [0, 1].$$

Problema 4. a) Demuestra que si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es positivamente homogénea de grado $p < 1$, con $f(0) = 0$ pero no idénticamente nula, entonces f no es diferenciable en 0 .

b) Demuestra que si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es positivamente homogénea de grado 1 y diferenciable en 0 entonces es lineal.

¿Hay alguna norma que sea diferenciable en \mathbb{R}^n ?

Problema 5. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 y sea A una matriz $n \times n$. Se define $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como $g(x) = f(Ax)$. Calcula la matriz hessiana de g , así como su determinante.

Problema 6. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 en un abierto U de \mathbb{R}^3 que contiene al punto $a = (3, 2, -1)$. Se sabe que:

$$f(a) = 6, \quad Df_a = [0 \ 0 \ 0], \quad \text{Hess}(f)_a = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 de f en a .

(b) Di, razonadamente, si a es máximo local de f , mínimo local de f o ninguna de las dos cosas.

Problema 7. Estudia los puntos críticos de la función $f(x, y) = x^4 + y^4 + 6x^2y^2 + 8x^3$.

Indicación: estudia el comportamiento de $h(x) = f(x, x)$ para $|x|$ pequeño.

Demuestra que f tiene un mínimo global, pero no un máximo global.

Problema 8.

a) Demuestra que la función

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} + x^2 + y^4 \quad ,$$

alcanza su valor mínimo ¿Alcanza un valor máximo?

b) Halla el punto o puntos donde f alcanza su mínimo.

Problema 9. Fijados puntos $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}^n$, determina $x \in \mathbb{R}^n$ tal que la expresión $\sum_{i=1}^k \|x - p_i\|_2^2$ sea lo más pequeña posible.

Problema 10. Dada una constante $c > 0$, consideramos la función:

$$f : (0, +\infty)^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdots x_n + c^{n+1} \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) .$$

(a) Comprueba que f tiene un único punto crítico a . Calcula explícitamente a y $f(a)$.

(b) Demuestra que si $|x_j| \leq c/(n+2)$ para algún $j \in \{1, \dots, n\}$ entonces $f(x) > f(a)$.

(c) Demuestra que si $|x_1|, \dots, |x_n| \geq c/(n+2)$ entonces $f(x) > \text{cte} \cdot \|x\|_\infty$. Deduce que $f(a)$ es el valor mínimo de f en todo su dominio.

Indicación: hazlo primero para $n = 2$, ayudándote de un dibujo en el cuadrante $(0, +\infty)^2$.

Problema 11. Calcula el polinomio de Taylor de orden 3 de f , en el punto indicado, utilizando oes de Landau en vez de hallar las derivadas parciales:

(a) $f(x, y) = \frac{e^{y^2}}{x}$ en el punto $(1, 0)$.

(b) $f(x, y) = \text{sen} \frac{x}{1 - y^2}$ en el punto $(0, 0)$.
