HOJA DE REPASO, 18 dic 2020.
Análisis Matemático.
CURSO 2020-2021.

---

1. (a) Halla la constante más pequeña c_1 tal que:

$$\|v\|_4 \;\leq\; c_1\,\|v\|_2 \quad , \quad \text{para todo } \; v \in \mathbb{R}^2 \,.$$

Sugerencia: considera v unitario y utiliza multiplicadores de Lagrange.

(b) Halla la constante más pequeña c_2 tal que:

$$\|v\|_2 \;\leq\; c_2\,\|v\|_4 \quad , \quad \text{para todo } \; v \in \mathbb{R}^2 \,.$$

(c) Explica por qué $c_2 > 1/c_1$.

---

2. Halla el valor de la constante c para el cual la siguiente función es diferenciable en $(0,0)$:

$$f(x,y) \;=\; \begin{cases} \dfrac{c\,x^3 + xy^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\[2ex] 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

---

3. Demuestra que la siguiente función alcanza su valor mínimo:

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \;\longrightarrow\; \mathbb{R} \quad , \quad f(x,y) \;\equiv\; \frac{1}{x^2+y^2} + x^2 + 3y^2 \,,$$

y determina explícitamente ese valor.

---

4. (a) Explica por qué el siguiente subconjunto es una subvariedad 1-dimensional del plano:

$$\Gamma \;=\; \big\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 e^x y + e^{x+y} \;=\; 1\,\big\} \,.$$

(b) Demuestra que hay un entorno U del origen $(0,0)$ tal que $\Gamma \cap U$ es un grafo $\{y = \varphi(x)\}$, con $\varphi(x)$ función de clase $\mathcal{C}^\infty$, y calcula $\varphi'(0)$ explícitamente.

(c) Determina las rectas tangente y normal a Γ en el punto $p = (0,0)$ de dos maneras:

1. Utilizando el resultado del apartado (b).
2. Utilizando el gradiente de la ecuación que define Γ.

---

5. Halla una función $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que la siguiente forma de Pfaff sea exacta en $\mathbb{R}^2$:

$$\omega \;=\; x^2 y\,dx + f(x)\,dy \,.$$

---

6. Dado el siguiente campo de vectores en $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{F} \;\equiv\; \big(\; x + z e^{yz} \;,\; y \;,\; -2z \,\big) \,,$$

calcula la 2-forma $F^\natural$ y una forma de Pfaff ω tal que $d\omega = F^\natural$.
Utiliza el resultado para dar un campo de vectores $\mathbf{G}$ tal que $\mathbf{rot}\,\mathbf{G} = \mathbf{F}$.