HOJA DE EJERCICIOS 10.
Análisis Matemático.
CURSO 2020-2021.

---

1. Consideramos la 2-forma $\omega = dx \wedge dy + x\,dy \wedge dz$ y la siguiente función paramétrica:

$$\Phi : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad \Phi(u,v) \;=\; \big(\, u^2 \,,\, uv \,,\, u + e^v \,\big)\ .$$

Calcula el pullback $\Phi^*\omega$ y la integral $\displaystyle\int_\Phi \omega$.

---

2. (1) Determina el valor de la constante c para el cual el siguiente campo de vectores en $\mathbb{R}^3$ tiene divergencia nula

$$\mathbf{F} \;=\; \big(\, c\,x + z e^{yz} \;,\; y \;,\; -2z \,\big)\ .$$

(2) Con ese valor de c, halla la 2-forma $\mathbf{F}^\natural$ (ejercicio 12 de la hoja 8) y calcula una forma de Pfaff ω tal que $d\omega = \mathbf{F}^\natural$. ¿Existe ω para otros valores de c?

(3) Utiliza ω para dar un campo de vectores $\mathbf{G}$ tal que $\mathbf{F} = \mathbf{rot}\,\mathbf{G}$ (ejercicio 9 de la hoja 9). ¿Existe un tal $\mathbf{G}$ para otros valores de c?

(4) El método usado para obtener $\mathbf{G}$ siempre da como resultado un campo de vectores con la primera componente nula ¿Puedes explicar por que?́

---

3. En el abierto $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definimos la siguiente forma de Pfaff:

$$\omega \;=\; \frac{x^2 + c\,y^2}{(x^2+y^2)^2}\,(-y\,dx + x\,dy)\ .$$

a) Demuestra que ω es cerrada, sea cual sea la constante c.

b) Demuestra que si $1 + c \neq 0$ entonces ω no es exacta en U.

---

4. Sea $V \subset \mathbb{R}^3$ un subespacio vectorial de dimensión 2, con una base $B_1 = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$. Consideramos una base diferente $B_2 = \{\vec{v_1} + \vec{v_2}, \vec{v_1} - \vec{v_2}\}$. Estudiar si estas dos bases inducen la misma orientación en V.

---

5. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie con una normal unitaria N. Tenemos una parametrización $\Phi(u,v) : R \to S$ y un difeomorfismo $\sigma(s,t) : R' \to R$. Consideramos la reparametrización $\Psi \equiv \Phi \circ \sigma : R' \to S$, es decir

$$\Psi(s,t) \;=\; \Phi(u,v)|_{(u,v)=\sigma(s,t)}\ .$$

Demuestra la identidad:

$$\det\big[\, N \mid \Psi_s \mid \Psi_t \,\big] \;=\; \det(D\sigma)\cdot\det\big[\, N \mid \Phi_u \mid \Phi_v \,\big]\ .$$

Deduce que, si Φ y Ψ son ambas compatibles con la misma normal N, entonces se tiene $\displaystyle\int_\Phi \Omega \;=\; \int_\Psi \Omega$ para toda 2-forma Ω cuyo dominio contenga la superficie S.

---

6. Consideramos el siguiente cilindro en $\mathbb{R}^3$:

$$S \;=\; \left\{ (x,y,z) \;:\; y^2+z^2=1 \;\;,\;\; -\frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{4} \right\} ,$$

y la 2-forma $\Omega \;=\; 2\,dx\wedge dy + 3\,y\,|z|\,dz\wedge dx$.

Las partes de arriba y abajo de S:

$$S^+ \;=\; S\cap\{z\ge 0\} \quad , \quad S^- \;=\; S\cap\{z\le 0\} ,$$

las ponemos como $S^+ = \Phi(R)$ y $S^- = \Psi(R)$, siendo $R = \big[-1/4\,,\,1/4\,\big]\times[-1,1]$ y $\Phi,\Psi : R\to\mathbb{R}^3$ las siguientes parametrizaciones:

$$\begin{aligned} \Phi(u,v) &= \big(a\,u\,,\,v\,,\,\sqrt{1-v^2}\,\big) \quad , \; a\in\{1,-1\} , \\ \Psi(u,v) &= \big(b\,u\,,\,v\,,\,-\sqrt{1-v^2}\,\big) \;\; , \; b\in\{1,-1\} . \end{aligned}$$

a) Calcula los cuatro valores de la suma $\displaystyle\int_\Phi \Omega + \int_\Psi \Omega$ para las diferentes elecciones de las constantes a,b.

b) Comprueba que $N \equiv (0,y,z)$ es una normal unitaria para S. Determina, razonadamente, para qué elección de a,b se verifica $\displaystyle\int_\Phi \Omega + \int_\Psi \Omega = \int_S \Omega$ cuando orientamos S por N.

---

7. Sea $S=\{x^2+y^2+z^2=1\}$ la esfera unidad, orientada por la normal exterior a la bola.

Calcula $\displaystyle\int_S \Omega$, convirtiéndola en un integral triple:

a) $\Omega = \big(\,x+\log(1+z^2)+x\cos(xy)\,\big)\,dy\wedge dz + \big(\,xyz\,\operatorname{sen}(xy) - z\cos(xy)\,\big)\,dx\wedge dy$.

b) $\Omega = e^x\,dy\wedge dz - ye^x\,dz\wedge dx + \big(\,3x^2z+3y^2z+z^3\,\big)\,dx\wedge dy$.

---

8. Consideramos la corona circular $U = \{\,(x,y)\;:\;1<x^2+y^2<4\,\}$. De una función $f(x,y)\in\mathcal{C}^1\big(\mathbb{R}^2\big)$ sabemos que:

$$f(x,y) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x^2+y^2 \;=\; 4 \,, \\ x^2 & \text{si} \quad x^2+y^2 \;=\; 1 \end{cases}$$

calcula $\displaystyle\int_U d\omega$, siendo $\omega = -y\,f\;dx + x\,f\,dy$.

---

9. Se consideran el cilindro $C=\{\,(x,y,z)\;:\;x^2+y^2=1\,,\,0<z<1\,\}$ y la siguiente 1-forma ω en $\mathbb{R}^3$

$$\omega \;=\; \Big(\operatorname{sen}(\pi z)\,e^{x^2+y^4} + y\,e^z\Big)\,dx + z^2\,dy + e^{x+y}\,dz \,.$$

a) Comprueba que $N:C\to\mathbb{R}^3$ dada por $N(x,y,z)=(x,y,0)$ es una normal unitaria para C.

b) Orientamos C por esta N. Explica por qué la parametrización

$$\Phi : R \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad R \;=\; (0,2\pi)\times(0,1) \quad , \quad \Phi(u,v)=(\cos u,\operatorname{sen} u, v) ,$$

satisface $\displaystyle\int_\Phi \Omega = \int_C \Omega$ para toda 2-forma Ω cuyo dominio contenga a C. En particular, utiliza Φ para calcular $\displaystyle\int_C d\,\omega$. *(Indicación: describe $\Phi|_{\partial R}$ como un camino poligonal).*

c) Consideramos otra parametrización $\Psi : U\to\mathbb{R}^3$, dada por:

$$U=\{\,(u,v)\;:\;1<u^2+v^2<4\,\} \quad , \quad \Psi(u,v) \;=\; \left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\,,\,\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\,,\,\sqrt{u^2+v^2}-1\right) .$$

Explica cómo utilizar Ψ para calcular la integral $\displaystyle\int_C \Omega$ de cualquier 2-forma Ω cuyo dominio contenga a C. En particular, úsala para calcular $\displaystyle\int_C d\,\omega$.

10. Sean $S = \{(x,y,z) \ : \ x^2+y^2+z^2=1\}$ la esfera unidad y $U \subseteq \mathbb{R}^3$ *cualquier* abierto espacial que la contenga. Sea N la normal unitaria exterior a la bola unidad.

Fijamos el rectángulo $R = [0,2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y la función $\Phi(u,v) : R \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$(x,y,z) \ = \ \Phi(u,v) \ \equiv \ \big(\cos v \cos u \, , \, \cos v \operatorname{sen} u \, , \, \operatorname{sen} v \big) \ .$$

a) Comprueba que Φ parametriza S y es compatible con N. Explica por qué $\displaystyle\int_{(S,\nu)} \Omega = \int_\Phi \Omega$ para toda 2-forma Ω definida en U.

b) Describe $\Phi|_{\partial R}$ como un camino poligonal y explica por qué para toda 1-forma ω, definida en U, se cumple la igualdad $\displaystyle\int_{\partial\Phi} \omega = 0$. Concluye que, si Ω es una 2-forma exacta en U, entonces $\displaystyle\int_S \Omega = 0$.

c) Comprueba que el "campo gravitatorio"

$$\mathbf{F} \ \equiv \ \rho^{-3}\,\mathbf{r} \ \equiv \ (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\,(x,y,z) \ ,$$

definido en $U_0 = \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$, tiene divergencia nula. Deduce que la correspondiente 2-forma $\mathbf{F}^\natural$ (problema 12 de la hoja 8 y problema 9 de la hoja 9) es cerrada en U_0 .

d) Utiliza el resultado de b) para probar que $\mathbf{F}^\natural$ no es exacta en U. Explica por qué no existe ningún campo $\mathbf{G}$ que esté definido en un entorno de la esfera y cumpla $\mathbf{rot}\,\mathbf{G} = \mathbf{F}$ en dicho entorno.

---

11. Sea C el cilindro $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2=1, \ 0 \le z \le 1\}$. Consideramos los discos

$$D_0 = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2 \le 1, \ z=0\big\} \quad \text{y} \quad D_1 = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2 \le 1, \ z=1\big\} \, .$$

Parametrizamos C por

$$\Phi : R \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad R \ = \ [0,2\pi] \times [0,1] \quad , \quad \Phi(u,v) \ = \ \big(\cos u \, , \, \operatorname{sen} u \, , \, v \big) \ .$$

a) Construye una parametrización Φ_0 de D_0 y otra Φ_1 de D_1 de tal manera que se cumpla

$$\int_\Phi d\omega = \int_{\Phi_0} d\omega + \int_{\Phi_1} d\omega \ ,$$

para toda forma de Pfaff (1-forma) ω en $\mathbb{R}^3$.

b) Aplica lo anterior al cálculo de $\displaystyle\int_\Phi d\omega$ cuando $\omega = xy(z-1)\,dx + xz\,dy + \cos(xy)\,dz$.

---

12. Sea R un cono de altura h y cuya base es una región plana regular D. Demostrar que

$$\text{volumen}\,(R) \ = \ \frac{1}{3}\,h \cdot \text{área}\,(D) \ .$$

Indicación: suponer que el cono tiene el vértice en el origen de coordenadas y la base paralela al plano $z=0$. Entonces considerar el campo $\vec{F} = (x,y,z)$.

---

13. Sean r, θ, z las coordenadas cilíndricas en $U = \mathbb{R}^3 \setminus (\text{eje } z)$. En particular $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

a) Determina la constante α para que el siguiente campo de vectores en U tenga divergencia nula:

$$r^\alpha \ (x,y,0) \ = \ r^{\alpha+1}\,\nabla r \ .$$

b) Una esfera inscrita en un cilindro circular recto se corta con dos planos paralelos perpendiculares al eje del cilindro. Demuestra que las porciones de la esfera y del cilindro comprendidas entre esos dos planos tienen igual área.

Nota: Arquímedes utilizó esta propiedad para calcular el área de la esfera y el volumen de la bola.