Ejercicios 79 a 89

79.

A. Dada la 1-forma en $\mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{\omega} = (x_1 + x_3)\, dx^1 - x_2^2\, dx^2 + x_2\, x_3\, dx^3$$

y el vector

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

calcular $\boldsymbol{\omega}_p(\boldsymbol{\xi})$, siendo $p = (1, 2, -1)$.

B. De una 1-forma $\boldsymbol{\omega}$ en $\mathbb{R}^2$ se sabe que

$$\boldsymbol{\omega}_p(\boldsymbol{\xi}) = -1\,, \qquad \boldsymbol{\omega}_p(\boldsymbol{\eta}) = -2\,,$$

siendo $p = (1, 2)$ y

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calcular $\boldsymbol{\omega}_p(\boldsymbol{\zeta})$ cuando

$$\boldsymbol{\zeta} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

C. Sabemos que en $p = (1, 2, 1)$ la 2-forma $\boldsymbol{\omega}$ en $\mathbb{R}^3$ satisface

$$\boldsymbol{\omega}_p(\boldsymbol{\xi}\,, \boldsymbol{\eta}) = 2\,, \quad \boldsymbol{\omega}_p(\boldsymbol{\xi}\,, \boldsymbol{\zeta}) = -4\,, \quad \boldsymbol{\omega}_p(\boldsymbol{\eta}\,, \boldsymbol{\zeta}) = -4\,,$$

siendo

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\zeta} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calcular

$$\boldsymbol{\omega}_p(2\,\boldsymbol{\eta}\,, \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\zeta}).$$

80.

A. Dada la 2-forma en $\mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{\omega} = dy \wedge dz - \ dz \wedge dx + 3\, dx \wedge dy$$

y los vectores

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

calcular

$$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})\,.$$

B. Calcular los productos exteriores

$$(dx + dy - dz) \wedge (dx + dy + dz)$$

y

$$(x\; dx + y\; dy + z\; dz) \wedge (x\; dy + y\; dz + z\; dx)\,.$$

C. Dadas las formas diferenciales en $\mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{\omega}_1 = dx - z\; dy\,, \qquad \boldsymbol{\omega}_2 = x\,y\,z\; dy \wedge dz - (x^2 + y^2 + z^2)\; dz \wedge dx\,,$$

calcular

$$d\,\boldsymbol{\omega}_1\,, \quad \boldsymbol{\omega}_1 \wedge d\,\boldsymbol{\omega}_1\,, \quad d\,\boldsymbol{\omega}_2\,, \quad \boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2\,.$$

81. Calcular el *pullback* $X^*\boldsymbol{\omega}$ para cada una de las siguientes formas $\boldsymbol{\omega}$ y funciones X :

1.
$$\begin{cases} X(u) = \left(u_1^2\,, u_2^2\,, \mathrm{e}^{u_1\,u_2}\right), \\[2ex] \boldsymbol{\omega} = x_2\; dx^1 + (x_1 - x_2 - x_3)\; dx^2 - dx^3\,. \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} X(u) = \left(u_1\, \cos u_2\,, u_1\, \sin u_2\,, \mathrm{e}^{u_1}\right), \\[2ex] \boldsymbol{\omega} = -3\,(x_1^2 + x_2^2)\; dx^2 \wedge dx^3 + (x_1^2 - x_2^2)\; dx^1 \wedge dx^2\,. \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} X(t) = \left(\cos t\,, \sin t\,, t\right), \\[2ex] \boldsymbol{\omega} = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\; dx^1 + (x_1 - \cos x_3)\; dx^2 + (x_1^2 + x_2^2 - 1)\; dx^3\,. \end{cases}$$

82.

A. Hallar la diferencial exterior de las siguientes 1-formas:

1. $x\,dy + y\,dx\,,$
2. $(u+v)\,(du+dv)\,,$
3. $f(x)\,dx + g(y)\,dy\,,$
4. $2\,x\,y\,dx + (x^2-y^2)\,dy\,,$
5. $(x+z)\,dx + (y-z)\,dy + (x-y)\,dz\,,$
6. $y\,z\,dx + x\,z\,dy + x\,y\,dz\,.$

B. Dadas las 1-formas diferenciales

$$\boldsymbol{\omega}_1 = -y\,dx + x\,z\,dy\,, \qquad \boldsymbol{\omega}_2 = dx + x^3\,dz\,,$$

y la función

$$X(u,v) = (\cos u\,, \sin u\,, v)\,,$$

calcular

$$X^*\boldsymbol{\omega}_1\,, \quad X^*(d\,\boldsymbol{\omega}_1)\,, \quad X^*(\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2)\,, \quad X^*(\boldsymbol{\omega}_1 \wedge d\,\boldsymbol{\omega}_2)\,.$$

83. Sea M la subvariedad 2-dim. de $\mathbb{R}^3$ dada por $M =$ gráfica de $(g\,,S)$, siendo

$$S = \{\, v \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 < v_1 + v_2 < 2\,,\; 0 < v_1 - v_2 < 2 \,\}\,, \qquad g(v) = \frac{1}{4}\left(v_1^2 - v_2^2\right).$$

Considérense en M los sistemas de coordenadas $(\mathrm{Y}\,,\mathrm{V})$, inducido por $(g\,,S)$ y también $(\mathrm{X}\,,\mathrm{U})$, definido por $\mathrm{U} = (0\,,1)\times(0\,,1)$,

$$\mathrm{X}(u) = \begin{bmatrix} u_1 + u_2 \\ u_1 - u_2 \\ u_1\,u_2 \end{bmatrix}.$$

Dada la 2-forma diferencial

$$\boldsymbol{\omega} = x\,dy \wedge dz - y\,dz \wedge dx\,,$$

se pide calcular

$$\mathrm{X}^*\boldsymbol{\omega}\,, \qquad \mathrm{Y}^*\boldsymbol{\omega}\,,$$

y las integrales

$$\int_{\mathrm{X}} \boldsymbol{\omega}\,, \qquad \int_{\mathrm{Y}} \boldsymbol{\omega}\,.$$

84. Considérese el *toro plano* en $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{T}_2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, para:

1. Demostrar que $\mathbb{T}_2$ es una subvariedad 2-dimensional de $\mathbb{R}^4$.
2. Calcular $\boldsymbol{V}_2$, el elemento de volumen 2-dimensional, *elemento de área*, de $\mathbb{T}_2$.
3. Calcular el área $(\mathbb{T}_2)$.

85. A. Para cada una de las siguientes parametrizaciones X de $\mathbb{S}^1$, determinar una normal unitaria $\boldsymbol{\nu}$ compatible con X :

1. $X(t) = (\cos t\,, \sin t)\,, \quad 0 < t < 2\pi\,.$
2. $X(t) = (\sin t\,, \cos t)\,, \quad 0 < t < 2\pi\,.$
3. $X(t) = \big(t\,, \sqrt{1-t^2}\ \big)\,, \quad -1 < t < 1\,.$
4. $X(t) = \big(t\,, -\sqrt{1-t^2}\ \big)\,, \quad -1 < t < 1\,.$

B. Para cada una de las siguientes parametrizaciones X del hiperboloide de una hoja

$$\mathcal{H} = \big\{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 - z^2 = 1\,\big\}\,,$$

determinar una normal unitaria $\boldsymbol{N}$ compatible con X :

1. $X(u,v) = \big(\cos u\, \cosh v\,, \sin u\, \cosh v\,, \sinh v\big)\,, \qquad 0 < u < 2\pi\,,\ v \in \mathbb{R}\,.$
2. $X(u,v) = \big(\cos v\, \cosh u\,, \sin v\, \cosh u\,, \sinh u\big)\,, \qquad v \in \mathbb{R}\,,\ 0 < v < 2\pi\,.$
3. $X(u,v) = \big(u\,, v\,, \sqrt{x^2 + y^2 - 1}\ \big)\,, \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B(0\,,1)}\,.$
4. $X(u,v) = \big(u\,, v\,, -\sqrt{x^2 + y^2 - 1}\ \big)\,, \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B(0\,,1)}\,.$
5. $X(u,v) = \big(\sqrt{1+v^2}\ \cos u\,, \sqrt{1+v^2}\ \sin u\,, v\big)\,, \quad 0 < u < 2\pi\,,\ v \in \mathbb{R}\,.$

86. Determinar una normal unitaria continua $\boldsymbol{N}$ para cada una de las hipersuperficies:

1. La elipse de ecuación
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$
2. La gráfica de una función
$$f \,:\, \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
de clase C^1 en un abierto Ω de $\mathbb{R}^n$.

3. El elipsoide de ecuación
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,.$$
4. La parte del hiperboloide de dos hojas
$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,.$$
limitada por $-2c<z<2c\,.$
5. La parte del paraboloide elíptico
$$\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$
limitada por $0\le z<c\,.$

87. Dado el sistema de coordenadas (X,U) en el hiperboloide
$$\mathcal{H}=\left\{\,(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\;:\;x^2+y^2+z^2-t^2=1\,\right\},$$
determinar una normal unitaria $\boldsymbol{N}$ compatible con X, siendo
$$\mathrm{X}(\theta,\varphi,u)=\left(\sqrt{1+u^2}\,\cos\varphi\,\sin\theta\,,\,\sqrt{1+u^2}\,\sin\varphi\,\sin\theta\,,\,\sqrt{1+u^2}\,\cos\theta\,,u\right)$$
y
$$\mathrm{U}:\quad 0<\theta<\pi\,,0<\varphi<2\pi\,,\;u\in\mathbb{R}\,.$$

88. Considérese la superficie
$$M=\left\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\;:\;z=\mathrm{e}^{-r}\,,\;r=\sqrt{x^2+y^2}\,\right\}$$
en $\mathbb{R}^3$. Elegir una orientación $\mathcal{O}$ en M para calcular la integral
$$\int_{(M,\mathcal{O})}\left(x\,dy\wedge dz-dz\wedge dx\right).$$

89. Dado un punto $p=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, considérese la 2-forma en $\mathbb{R}^3\setminus\{p\}$ dada por
$$\boldsymbol{\omega}=\frac{(x-a)\,dy\wedge dz+(y-b)\,dz\wedge dx+(z-c)\,dx\wedge dy}{\left((x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\right)^{3/2}}$$
para calcular $d\boldsymbol{\omega}$ y la integral
$$\int_M\boldsymbol{\omega}\,,$$
siendo M una superficie esférica de $\mathbb{R}^3$ centrada en p.