

Ejercicios 72 a 78

72. Probar que todos los puntos $x \in \mathbb{R}^4$ en los que

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2$$

tiene un extremo local sujeto a las condiciones

$$\begin{cases} x_1^2 + x_3^2 + x_4^2 = 4, \\ x_2^2 + 2x_3^2 + 3x_4^2 = 9, \end{cases}$$

se hallan entre

$$(0, 0, \pm\sqrt{3}, \pm 1), \quad (0, \pm 1, 2, 0), \quad (\pm 1, 0, 0, \pm\sqrt{3}), \quad (\pm 2, \pm 3, 0, 0).$$

¿Cuáles de ellos determinan máximos locales y cuáles mínimos locales?

73. Hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen que se puede inscribir en el elipsoide

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1.$$

74. Sean

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$$

la esfera unidad de \mathbb{R}^n y el hiperplano afín

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, a \rangle = c\},$$

donde $a \in \mathbb{S}^{n-1}$ y $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$.

1. Demostrar que el ínfimo en la distancia entre \mathbb{S}^{n-1} y H ,

$$\text{dist}(\mathbb{S}^{n-1}, H) = \inf \{ \|x - y\|_2 : x \in \mathbb{S}^{n-1}, y \in H \}$$

se alcanza en un único par $s_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$, $x_0 \in H$, es decir, es un mínimo.

2. Considérense las funciones

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

dadas por

$$f(x, y) = \|x - y\|_2^2, \quad g(x, y) = (\|x\|_2^2 - 1, \langle x, a \rangle - c),$$

para calcular x_0 y s_0 , utilizando multiplicadores de LAGRANGE.

75. Sean $a, b > 0$ y $p > 1$.

1. Calcular el máximo de la función

$$f(x, y) = ax + by,$$

de los $x > 0, y > 0$ sujetos a la condición

$$x^p + y^p = 1.$$

2. Demostrar que todos los $x > 0, y > 0$ satisfacen

$$ax + by \leq (x^p + y^p)^{1/p} (a^q + b^q)^{1/q},$$

donde q viene dado por

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

3. Utilizar lo anterior para demostrar la *desigualdad de HÖLDER*

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{1/q},$$

válida para reales positivos x_i, y_i .

76. Demostrar que todo $x \in \mathbb{R}^n$ satisface

$$n^n \prod_{j=1}^n x_j^2 \leq \|x\|_2^{2n}.$$

Obtener como consecuencia la *desigualdad geométrico-aritmética*

$$(20) \quad (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$

válida para reales positivos a_i .

77. Sean $t_1, t_2, \dots, t_n \geq 0$ tales que

$$t_1 + t_2 + \dots + t_n = 1$$

y x_1, x_2, \dots, x_n tales que

$$0 < m \leq x_j \leq M, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Para demostrar la *desigualdad de KANTOROVICH*

$$(21) \quad \left(\sum_{j=1}^n t_j x_j \right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{t_j}{x_j} \right) \leq \frac{(m+M)^2}{4mM},$$

procedemos como sigue:

1. Es suficiente demostrar la desigualdad cuando $mM = 1$ y, en este caso, $0 < m < 1$.

2. Demostrar

$$\sum_{j=1}^n t_j x_j + \sum_{j=1}^n \frac{t_j}{x_j} \leq m + \frac{1}{m},$$

3. Utilizar la desigualdad geométrico-aritmética (20) para llegar a (21).

78. Dada

$$f(x) = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

probar que un extremo local de f sujeto a la condición

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = a$$

es

$$a^k n^{1-k}.$$