Ejercicios 65 a 71

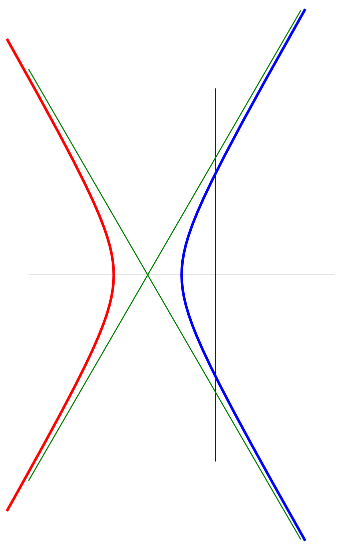
65. Considérese M el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$ cuyas coordenadas polares [2] satisfacen

$$r = \frac{6}{1 - 2\cos\theta}\,. \tag{19}$$

1. Encontrar, si es posible, $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable de clase C^∞ y tal que
   a. $M = f^{-1}(\{0\})$.
   b. $Df(x)$ tiene rango 1 en todo $x \in M$.
2. Estudiar si $\mathrm{X} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\mathrm{X}(t) = \big(-4 + 2\cosh t\,,\, 2\sqrt{3}\,\sinh t\big)$$

   define un *sistema de coordenadas* en M o en algún subconjunto de M .



[2] Cuando $r < 0$ para un valor de θ en (19), entendemos que se trata de un punto con coordenadas polares $(-r\,, \theta + \pi)$.

66. Considérese el conjunto M de los $x = (x_1\,, x_2\,, x_3) \in \mathbb{R}^3$ que verifican

$$x_2^3 - x_1\, x_2 - x_3 = 0\,.$$

A.

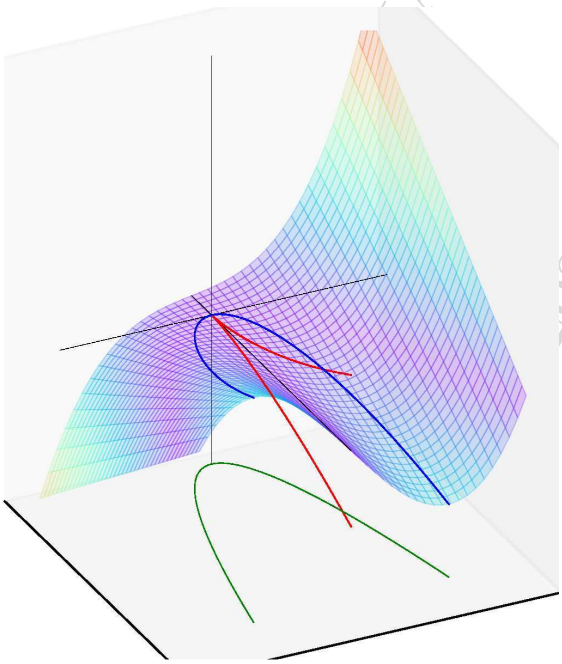
1. Demostrar que M es una C^∞-subvariedad 2-dimensional de $\mathbb{R}^3$.

2. Demostrar que $\mathrm{X} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, dada por

$$\mathrm{X}(u) = \big(u_1\,, u_2\,, u_2^3 - u_1\, u_2\big)\,, \qquad u = (u_1\,, u_2) \in \mathbb{R}^2\,,$$

   satisface:

   a. X es inyectiva en $\mathbb{R}^2$ y $M = \mathrm{X}(\mathbb{R}^2)$.
   b. $D\mathrm{X}(u)$ tiene rango 2 en todo $u \in \mathbb{R}^2$.
   c. $\mathrm{X}^{-1} : M \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es continua.



B. Siendo $\pi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la proyección ortogonal $\pi(x) = (x_1\,, 0\,, x_3)$, considérese

$$\mathrm{Y} = \pi \circ \mathrm{X}\,.$$

1. Hallar

$$S = \big\{\, u \in \mathbb{R}^2 \;:\; \operatorname{rango} D\mathrm{Y}(u) \neq 2 \,\big\}$$

   y comprobar que $\Gamma = \mathrm{Y}(S)$ es

$$\Gamma = \big\{\, x \in \mathbb{R}^3 \;:\; 4\, x_1^3 = 27\, x_3^2\,, \quad x_2 = 0 \,\big\}\,.$$

2. ¿ Es Γ una subvariedad 1-dimensional de $\mathbb{R}^3$?

67. Considérese la función

$$f(x,y) = x^3 - 4\,x^2\,y + 2\,x\,y^2 + y^3\,, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,$$

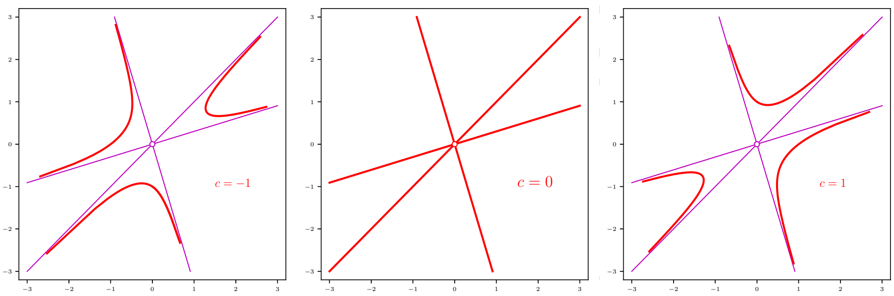
y, para cada $c \in \mathbb{R}$, su conjunto de nivel

$$L_c = \left\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ f(x,y) = c \,\right\}.$$

1. Demostrar que cada L_c se puede obtener por homotecia a partir de los conjuntos de nivel correspondientes a $c = -1$, $c = 0$ y $c = 1$.

2. Hallar los conjuntos de nivel correspondientes a estos tres valores de c. ¿Cuándo son subvariedad 1-dim. de $\mathbb{R}^2$?

3. Hallar, si procede, parametrizaciones de cada uno de estos conjuntos.



68. A. Considérese el plano en $\mathbb{R}^3$ dado por

$$M = \left\{\, x \in \mathbb{R}^3 \ :\ x_1 = x_2 \,\right\},$$

y también

$$\mathrm{U} = \left\{\, u \in \mathbb{R}^2 \ :\ u_1 > u_2 \,\right\},$$

junto a

$$\mathrm{X} \,:\, \mathrm{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

dada por

$$\mathrm{X}(u) = \big(u_1 + u_2\,, u_1 + u_2\,, u_1\,u_2\big)\,, \qquad u \in \mathrm{U}\,.$$

¿Es $(\mathrm{X}\,,\mathrm{U})$ un sistema de coordenadas en M o en algún subconjunto de M?

B.

1. Sea $f \,:\, \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = (x_1 + x_2 + x_3 - 1)^2\,, \qquad x = (x_1\,, x_2\,, x_3) \in \mathbb{R}^3\,.$$

   a. Encontrar los *puntos críticos* de f, es decir, aquellos $x \in \mathbb{R}^3$ donde $\operatorname{rango} Df(x) \neq 1$.

b. ¿Para qué valores de λ el conjunto de nivel

$$L_\lambda = \{\, x \in \mathbb{R}^3 \;:\; f(x) = \lambda \,\}$$

es una superficie regular?

2. Responder a las mismas preguntas relativas a la función $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = x_1\, x_2\, x_3^2\,, \qquad x = (x_1\,, x_2\,, x_3) \in \mathbb{R}^3\,.$$

69. A. Comprobar que

$$M = \{\, x \in \mathbb{R}^3 \;:\; x_3 = x_1^2 - x_2^2 \,\}$$

es una superficie regular en $\mathbb{R}^3$. ¿Cuál de los siguientes $(\mathrm{X}\,,\Omega_1)$, $(\mathrm{Y}\,,\Omega_2)$ es un sistema de coordenadas en M o en algún subconjunto de M?

$$\begin{cases} \Omega_1 = \mathbb{R}^2\,, \\ \mathrm{X}(u) = (u_1 - u_2\,, u_1 + u_2\,, 4\,u_1\,u_2)\,, \qquad u \in \Omega_1\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Omega_2 = \{\, u \in \mathbb{R}^2 \;:\; \quad u_1 \neq 0 \,\}\,, \\ \mathrm{Y}(u) = (u_1\, \cosh u_2\,, u_1\, \sinh u_2\,, u_1^2)\,, \qquad u \in \Omega_2\,. \end{cases}$$

B. Dados $a\,, b\,, c \neq 0$, considérese el elipsoide

$$M = \Big\{\, x \in \mathbb{R}^3 \;:\; \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1 \Big\}\,.$$

Demostrar que M es una superficie regular en $\mathbb{R}^3$. Estudiar si

$$\mathrm{X}(u) = \big(\, a \sin u_1\, \cos u_2\,,\; b \sin u_1\, \sin u_2\,,\; c\, \cos u_1 \,\big)\,,$$

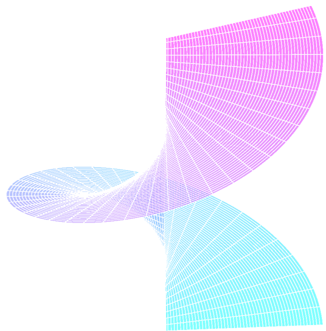
definida en los $u = (u_1\,, u_2) \in \Omega = (0\,,\pi)\times(0\,,2\pi)$, es un sistema de coordenadas en M o en algún subconjunto de M.

Describir geométricamente las curvas $\gamma(t) = \mathrm{X}(u_1\,,t)$, para cada u_1 constante.

70. Demostrar que el *helicoide*, dado por

$$\mathcal{H} = \{\, (u_1\, \cos u_2\,,\; u_1\, \sin u_2\,,\; a\,u_2\,) \;:\; u_1 > 0\,,\; u_2 \in \mathbb{R} \,\}\,,$$

donde $a > 0$, es una C^∞-subvariedad 2-dim. de $\mathbb{R}^3$.



Demostrar que todo $x \in \mathcal{H}$ satisface la ecuación

$$x_2 = x_1 \tan \frac{x_3}{a}, \qquad \text{cuando} \quad \frac{x_3}{a} \notin \Big((k + \frac{1}{4})\pi \,, (k + \frac{3}{4})\pi \Big),$$

$$x_1 = x_2 \cot \frac{x_3}{a}, \qquad \text{cuando} \quad \frac{x_3}{a} \in \Big[(k + \frac{1}{4})\pi \,, (k + \frac{3}{4})\pi \Big],$$

donde $k \in \mathbb{Z}$.

71. *Las matrices $\mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonales.* Considérese el grupo que forman las matrices de $\mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonales

$$\mathcal{O}_n = \big\{ \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times n} \,:\, \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} = \mathbf{I}_n \big\},$$

Utilizar la función

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}, \qquad \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

estudiada en el ejercicio **27.**B y tener en cuenta que la matriz $f(\mathbf{X})$ es simétrica para demostrar que $\mathcal{O}_n$ es una C^∞-subvariedad de $\mathbb{R}^{n\times n}$ y calcular su dimensión.