Ejercicios 58 a 64

58.

1. Determinar los valores de λ para los que el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x_1\, x_3^3 + x_2\, x_4 + \lambda\, x_1 = 1\,, \\ 2\, x_1\, x_2^3 + x_3\, x_4^2 + \lambda\,(x_2 - 1) = 0\,, \end{cases}$$
define a (x_1, x_2) como función implícita diferenciable de los (x_3, x_4) en un entorno de los puntos $a = (0, 1)$ y $b = (0, 1)$.

2. Si designamos dicha función mediante $(x_1, x_2) = F(x_3, x_4)$, calcular los valores de λ para los cuales F admite una inversa local de clase C^1 en un entorno de b.

3. Demostrar que para los valores de λ no obtenidos en el primer apartado no puede existir tal función F.

59. Dado $a \in \mathbb{R}$, considérese la función
$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
definida
$$f(x, y) = \bigl(x_1^3 + x_2^3 - 3\, a\, x_1\, x_2\,, y\, x_1 - x_2\bigr)\,, \qquad x = (x_1\,, x_2) \in \mathbb{R}^2\,, y \in \mathbb{R}\,.$$

1. Hallar un abierto $A \subset \mathbb{R}$ y una función $g : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que
$$f\bigl(g(y)\,, y\bigr) = 0\,, \qquad y \in A\,.$$

2. Determinar los $(x\,, y) \in \mathbb{R}^3$ para los que
$$\mathbf{M}(x, y) = \left[\frac{\partial f(x\,, y)}{\partial x}\right] \quad \text{no es invertible.}$$
Confrontar esta situación con las hipótesis del Teorema de la Función Implícita.

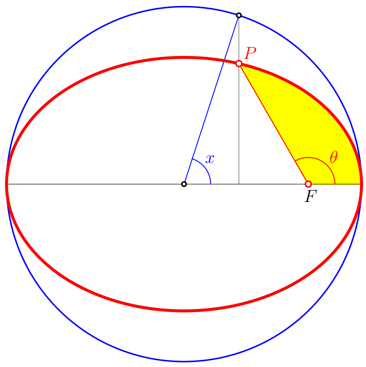
3. Hallar un abierto $B \subset \mathbb{R}$ y una función $h : B \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tales que
$$\begin{cases} \det \mathbf{M}\bigl(h(y)\,, y\bigr) = 0\,, \\ y\, h_1(y) - h_2(y) = 0\,. \end{cases}$$
Calcular $f_1\bigl(h(y)\,, y\bigr)$ para los $y \in B$.

4. Utilizar coordenadas polares para representar gráficamente en $\mathbb{R}^2$ las curvas dadas por g y h.

60. *La ecuación de* Kepler se puede escribir en la forma

$$x = y_1 + y_2 \sin x\,, \tag{14}$$

entendiendo x como incógnita e $y = (y_1\,, y_2)$ como parámetro. En la descripción del movimiento planetario, x representa la anomalía excéntrica, y_1 es proporcional al tiempo e y_2 es la excentricidad de la elipse. En consecuencia, tomamos $\Omega = \left\{\, y \in \mathbb{R}^2 \;:\; |y_2| < 1 \,\right\}$ como espacio de parámetros.



A.

1. Demostrar que (14) tiene una solución única $x = g(y)$ cuando $y \in \Omega$. Demostrar que la función $g : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es $C^\infty(\Omega)$.

2. Comprobar que

$$g(\pi\,, y_2) = \pi\,, \quad g(y_1 + 2\pi\,, y_2) = g(y) + 2\pi\,, \qquad y \in \Omega\,.$$

3. Comprobar que

$$g(-y_1\,, y_2) = -\,g(y_1\,, y_2)\,, \quad g(0\,, y_2) = 0\,, \qquad |y_2| < 1\,.$$

También
$$\frac{\partial^{2k} g(0\,, y_2)}{\partial\, y_1^{2k}} = 0\,, \qquad |y_2| < 1\,,\ k \in \mathbb{N}\,.$$

4. Calcular
$$\frac{\partial\, g(y)}{\partial y_1}$$
para cada $y \in \Omega$.

B. Consideremos ahora el caso $y_2 = 1$. Demostrar que existe una única función

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que $x = h(y_1)$ es solución de (14). Demostrar que $h(0) = 0$ y que h es continua.

Demostrar que

$$y_1 = \frac{x^3}{6}\left(1 + \mathcal{O}(x^2)\right), \quad \text{cuando} \quad x \to 0,$$

y deducir que se verifica

$$\lim_{y_1 \to 0} \frac{h(y_1)}{(6\, y_1)^{1/3}} = 1 .$$

En particular, obtener que h no es diferenciable en $y_1 = 0$.

61. Dados $b > 0$ y una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tales que

$$f(0) \neq -1, \qquad \int_0^b f(t)\, dt = 0,$$

demostrar que la ecuación

$$x = \int_x^a f(t)\, dt$$

tiene, para a suficientemente próximo a b, solución única $x = g(a)$ con $g(a)$ próximo a 0. Demostrar que g es una función C^1 y calcular $g'(b)$.

¿Cómo cambia lo anterior cuando $b = 1$ y $f(t) = -1 + 2\,t$?

62. Considérese la ecuación

$$x^3\, y_1 + x^2\, y_1\, y_2 + x + y_1^2\, y_2 = 0, \tag{15}$$

donde $x \in \mathbb{R}$ e $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

1. Demostrar que existen abiertos Ω en $\mathbb{R}^2$, con $y_0 = (-1, 1) \in \Omega$ y U en $\mathbb{R}$ con $x_0 = 1 \in U$, tales que para cada $y \in \Omega$ la ecuación (15) tiene una única solución $x = g(y) \in U$. Demostrar que la función $g : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow U \subset \mathbb{R}$ es de clase C^∞ en Ω.
2. Calcular
$$\nabla g(y_0), \qquad \frac{\partial^2 g(y_0)}{\partial\, y_1\, y_2}.$$
3. Demostrar que no existen abiertos $\Omega' \subset \mathbb{R}^2$ con $y_0 \in \Omega'$ y $U' \subset \mathbb{R}$ con $-1 \in U'$, tales que para cada $y \in \Omega'$ la ecuación (15) tiene solución *única* en U'.

63. Dadas $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica y definida positiva, considérese la función $L = L(x\,,\boldsymbol{\xi})$ que a cada $x \in \mathbb{R}^n$ asocia

$$L(x\,,\cdot) : \mathbb{R}^n_x \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida

$$L(x\,,\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} - V(x)\,.$$

1. Comprobar que para cada $x \in \mathbb{R}^n$ la función $L(x\,,\cdot)$ es una función convexa de los $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n_x$.
2. Comprobar que para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n_x$ la función de $\mathbb{R}^n_x$ en $\mathbb{R}$ dada por

   $$\boldsymbol{\xi} \longrightarrow \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi} - L(x\,,\boldsymbol{\xi}) \tag{16}$$

   es cóncava y tiende a $-\infty$ cuando $\|\boldsymbol{\xi}\| \to +\infty$.
3. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n_x$, calcular

   $$H(x\,,\boldsymbol{\eta}) = \sup\left\{\, \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi} - L(x\,,\boldsymbol{\xi}) \;:\; \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n_x \,\right\}.$$

64. Sean Ω un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{R}^n$ y $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^s , con $s \geq 2$.

Consideramos la *aplicación gradiente*, $\boldsymbol{\phi} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, dada por

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})\,, \qquad \mathbf{x} \in \Omega\,.$$

A. Demostrar que si $\det(\operatorname{Hess} f)_{\mathbf{x}} \neq 0$ en cada $\mathbf{x} \in \Omega$, entonces $\boldsymbol{\phi}$ es un C^{s-1}-difeomorfismo local en Ω .

B. Supongamos que Ω es convexo y $(\operatorname{Hess} f)_{\mathbf{x}}$ es definida positiva en todo $\mathbf{x} \in \Omega$.

1. Demostrar que $\boldsymbol{\phi}$ es inyectiva en Ω y que resulta que $\boldsymbol{\phi} : \Omega \longrightarrow \boldsymbol{\phi}(\Omega)$ es un C^{s-1}-difeomorfismo.
2. Sabemos por el ejercicio 46 que f es convexa en Ω . Considérese la función

   $$F : \boldsymbol{\phi}(\Omega) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

   definida

   $$F(\mathbf{y}) = \sup\left\{\, \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} - f(\mathbf{x}) \;:\; \mathbf{x} \in \Omega \,\right\}, \qquad \mathbf{y} \in \boldsymbol{\phi}(\Omega)\,. \tag{17}$$

   Demostrar que

   $$F(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} - f(\mathbf{x})\,, \qquad \text{en los } \mathbf{y} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})\,, \quad \mathbf{x} \in \Omega\,.$$
3. Demostrar

   $$\nabla F(\mathbf{y}) = \mathbf{x}\,, \qquad \mathbf{y} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})\,, \qquad \mathbf{x} \in \Omega\,, \tag{18}$$

   y que F es de clase C^s en Ω .
4. Comprobar la identidad

   $$D^2F(\mathbf{y}) = D^2f(\mathbf{x})^{-1}\,, \qquad \mathbf{y} = \nabla f(\mathbf{x})\,, \quad \mathbf{x} \in \Omega\,.$$