Ejercicios 51 a 57

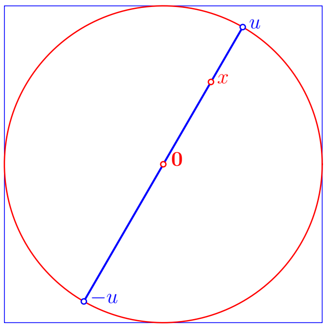
51. A. Dado $\delta > 0$, consideremos el cubo n-dimensional $Q = [-\delta, \delta]^n$ y una función

$$f : Q \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

convexa en Q. Sea V el conjunto formado por los vértices de Q y pongamos

$$M = \max\{ f(x) \,:\, x \in V \}.$$

Dado x con $\|x\| < \delta$, sean u y $-u$ los puntos alineados con 0 y x y tales que $\|u\| = \delta$.



1. Escribir x como combinación convexa de 0 y u y también escribir 0 como combinación convexa de x y $-u$, para obtener

$$x = t\,u + (1-t)\,0\,,$$
$$0 = s\,x + (1-s)\,(-u)\,.$$

¿Qué relación hay entre t y s?

2. Demostrar que

$$f(x) \le t\,M + (1-t)\,f(0)\,,$$

$$f(0) \le \frac{f(x) + t\,M}{1+t}\,.$$

3. Concluir que f es continua en 0.

B. Sean K un subconjunto abierto y convexo de $\mathbb{R}^n$ y $f : K \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa en K. Demostrar que f es continua en K.

C. Mostrar un subconjunto K de $\mathbb{R}$ que es convexo y no es cerrado y una función $f : K \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que es convexa en K pero no es continua en K.

52. Sean

$$\Omega = \{\, x \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1 + x_2 + x_3 \neq -1 \,\},$$

y la función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuyas componentes vienen dadas por

$$f_i(x) = \frac{x_i}{1 + x_1 + x_2 + x_3}\,, \qquad x \in \Omega\,.$$

1. Demostrar que f es inyectiva en Ω.
2. Calcular $\det Df(x)$ para cada $x \in \Omega$.
3. Calcular $f(\Omega)$ y la expresión explícita de la función inversa de f.

53. *Coordenadas polares.* Considérense

$$C = \{\, (r\,,\theta) \,:\, r > 0\,,\ -\pi < \theta < \pi \,\}, \qquad \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{\, (x_1\,,0) \,:\, x_1 \leq 0 \,\},$$

y la función $f : C \longrightarrow \Omega$ dada por

$$f(r\,,\theta) = (r\,\cos\theta\,, r\,\sin\theta)\,,$$

que es de clase C^∞ en C.

1. Demostrar que f es biyectiva de C en Ω.
2. Sea $g : \Omega \longrightarrow C$ la función inversa de f. Demostrar que g es diferenciable en Ω. Utilizar la Regla de la Cadena para calcular $Dg(x)$ para cada $x \in \Omega$.
3. Comprobar que g se puede escribir en la forma

$$g(x) = \left(\|x\|_2\,, 2\,\arctan \frac{x_2}{\|x\|_2 + x_1} \right).$$

Calcular $Dg(x)$ utilizando esta expresión.

Observación. Recuérdese la definición de la función inversa de la tangente: *Dado* $x \in \mathbb{R}$,

$$\arctan x = \quad \textit{único}\ \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right) \qquad \textit{tal que} \quad \tan\theta = x\,.$$

54. A. Considérese la función definida en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mediante

$$F(x) = \left(\frac{-\,y}{x^2 + y^2}\,, \frac{x}{x^2 + y^2} \right), \qquad x = (x_1\,,x_2) \neq 0\,.$$

1. Comprobar que F es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ y

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial F(x)}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial F(x)}{\partial x_2} \qquad \text{en todo } x \in \mathbb{R}^2\,, x \neq 0\,.$$

2. Calcular el trabajo

$$\int_C F\,ds$$

realizado por F a lo largo de la circunferencia unidad orientada positivamente.

3. Demostrar que no existe ninguna función U de clase C^1 en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ y tal que $F(x) = \nabla U(x)$ en todo $x \in \mathbb{R}^2\,, x \neq 0$.

B. Considérese ahora la misma función F, pero definida en

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{\, (x_1\,, 0) \;:\; x_1 \leq 0 \,\}\,.$$

1. Utilizar coordenadas polares

$$x_1 = r\,\cos\theta\,, \quad x_2 = r\,\sin\theta\,, \qquad r > 0\,,\ -\pi < \theta < \pi\,,$$

y el Teorema de la Función Inversa para demostrar que θ es una función de clase C^1 de los $x \in \Omega$ y que satisface

$$F(x) = \nabla\theta(x)\,, \qquad \text{en todos los } x \in \Omega\,.$$

2. Utilizar la función arctan para calcular explícitamente $\theta(x)$.

55. Considérese la función $f \,:\, \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x) = \big(x_1^2 - x_2^2\,,\, 2\,x_1\,x_2\big)\,, \qquad x = (x_1\,, x_2)\,.$$

1. Comprobar que f no es inyectiva en $\mathbb{R}^2$, pero sí es inyectiva en

$$\Omega = \{\, x \in \mathbb{R}^2 \;:\; x_1 > 0 \,\}\,.$$

Calcular $f(\Omega)$.

Demostrar que si f es inyectiva en $A \subset \mathbb{R}^2$ entonces $A \cap (-A) = \emptyset$.

2. Sea $g \,:\, f(\Omega) \longrightarrow \Omega$ la función inversa de f en $f(\Omega)$. Teniendo en cuenta que $f \in C^1(\Omega)$, utilizar la identidad $g\big(f(x)\big) = x$, $x \in \Omega$ para demostrar que las derivadas parciales, $i = 1\,, 2$,

$$\frac{\partial g(y)}{\partial y_i} \qquad \text{existen en cada } y \in f(\Omega)\,.$$

Demostrar que g es diferenciable en su dominio.

3. Calcular $\det Dg(y)$ a partir de $\det Df(x)$, siendo $y = f(x)\,, x \in \Omega$.

56. A. Demostrar que todo $x \in \mathbb{R}\,, x \neq 0$ satisface

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\,, & x > 0\,, \\ -\dfrac{\pi}{2}\,, & x < 0\,. \end{cases}$$

B. Sean

$$T = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 < x_1\,,\, 0 < x_2\,,\, x_1 + x_2 < \frac{\pi}{2} \right\}$$

y la función $f \,:\, T \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida

$$f(y) = \left(\frac{\sin x_1}{\cos x_2}\,,\, \frac{\sin x_2}{\cos x_1} \right), \qquad x \in T\,.$$

1. Demostrar que $f(x) \in Q = (0\,,1) \times (0\,,1)$ para todo $x \in T$.
2. Dados $y \in Q$ y $x \in \mathbb{R}^2$ tales que $y = f(x)$, demostrar

   (13) $$1 = \cos^2 x_i + y_i^2 \cos^2 x_j\,.$$

   Calcular
   $$\frac{1 - y_i^2}{1 - y_j^2}\,.$$

   Dado $y \in Q$, hallar el único $x \in T$ tal que $y = f(x)$.
3. Explicar por qué f es C^∞ en T. Calcular $Jf(x)$ para cada $x \in T$.
4. Concluir que f es un *difeomorfismo*[1] *de clase* C^∞ de T en Q.

57. *Coordenadas esféricas en* $\mathbb{R}^n$. Para cada $n = 2\,, 3\,, \ldots$ definimos funciones

$$\phi_n \,:\, \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

de forma recursiva mediante

$$\phi_2(r\,,\theta_1) = (r\,\cos\theta_1\,, r\,\sin\theta_1)$$

y, para los $n > 2$,

$$\phi_n(r\,,\theta_1\,,\ldots\,,\theta_{n-1}) = (x_1\,,x_2\,,\ldots\,,x_n)$$

donde

$$x_1 = r\,\cos\theta_1\,,$$
$$(x_2\,,\ldots\,,x_n) = \phi_{n-1}(r\,\sin\theta_1\,,\theta_2\,,\ldots\,,\theta_{n-1})\,.$$

[1] Es decir: f es biyectiva de T en Q, $f \in C^\infty(T)$ y su inversa es $C^\infty(Q)$.

1. Comprobar que $r = \|x\|_2$ y que

$$
\begin{aligned}
x_1 &= r\,\cos\theta_1\,,\\
x_i &= r\,\cos\theta_i \prod_{j=1}^{i-1}\sin\theta_j\,, \qquad 2 \le i < n-1\,,\\
x_n &= r\prod_{j=1}^{n-1}\sin\theta_j\,,
\end{aligned}
$$

utilizando el Principio de Inducción.

2. Escribir la matriz $D\phi_n(r\,,\theta_1\,,\ldots\,,\theta_{n-1})$. Demostrar

$$J\phi_n(r\,,\theta_1\,,\ldots\,,\theta_{n-1}) = r\,(\sin\theta_1)^{n-2}\,J\phi_{n-1}(r\,,\theta_2\,,\ldots\,,\theta_{n-1})$$

y

$$J\phi_n(r\,,\theta_1\,,\ldots\,,\theta_{n-1}) = r^{n-1}\prod_{j=1}^{n-2}(\sin\theta_j)^{n-j-1}\,.$$

3. Sean

$$
\begin{aligned}
\Omega_n = \Big\{ (r\,,\theta_1\,,\ldots\,,\theta_{n-1}) \,:\, & r>0\,,\\
& 0<\theta_j<\pi\,,\ 1\le j<n-1\,,\\
& -\pi<\theta_{n-1}<\pi \Big\}
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\Delta_n &= \mathbb{R}^n \setminus \big\{ x\in\mathbb{R}^n \,:\, x_n = 0 \ \text{ y } \ x_{n-1}\le 0 \big\}\\
&= \big\{ x\in\mathbb{R}^n \,:\, x_n \ne 0 \ \text{ o } \ x_{n-1} > 0 \big\}\,.
\end{aligned}
$$

Utilizar el Principio de Inducción para demostrar que toda

$$\phi_n \,:\, \Omega_n \longrightarrow \Delta_n$$

es biyectiva.