Ejercicios 44 a 50

44. Decimos que una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, de clase C^2, *es armónica en* $\mathbb{R}^n$ cuando

$$\Delta f(x) = 0 \qquad \text{en todo} \qquad x \in \mathbb{R}^n .$$

Considérese la clase de matrices $\mathbb{R}^{n\times n}$ e invertibles que son de la forma

$$\mathbf{A} = \lambda\,\mathbf{B}\,, \qquad \text{con } \lambda \neq 0 \text{ y } \mathbf{B} \text{ ortogonal.} \tag{11}$$

Considérese también el cambio lineal de variables dado por

$$x = \mathbf{A}y\,, \qquad g(y) = f(x)\,.$$

Demostrar:

1. $$D^2 g(y) = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\, D^2 f(x)\, \mathbf{A}\,.$$
2. Si la función $f(x)$ es armónica y $\mathbf{A}$ satisface (11), entonces $g(y)$ es armónica.
3. Si una matriz $\mathbf{A}$ es tal que para toda $f(x)$ armónica la correspondiente $g(y)$ también es armónica, entonces $\mathbf{A}$ satisface (11).

45. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto y $u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ una función $u \in C^2(\Omega)$ que safisface

$$\Delta u = f \quad \text{en } \Omega\,.$$

Considérese la función

$$v(x) = \|x\|_2^{2-N}\, u(y)\,, \qquad y = \frac{x}{\|x\|_2^2}\,,$$

definida en los $x \in \mathbb{R}^N$ tales que $y \in \Omega$.

Calcular

$$\Delta v(x)$$

en términos de la función f.

46. Sea Ω un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, abierto y convexo y sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 en Ω. Demostrar que son equivalentes:

1. f es convexa en Ω .

2. $(\mathrm{Hess} f)_p$ es es semidefinida positiva para todo $p \in \Omega$.

47. En $\mathbb{R}^n$ decimos que un punto x es *combinación convexa de los puntos* $x_1, x_2, \dots, x_m$ cuando existen $t_1, t_2, \dots, t_m \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} x &= t_1 x_1 + t_2 x_2 + \cdots + t_m x_m \,, \\ 0 &\le t_j \,, \quad \text{para todo } j = 1, 2, \dots, m \,, \\ 1 &= t_1 + t_2 + \cdots + t_m \,. \end{aligned} \tag{12}$$

A. Sean x_1, x_2, x_3 tres puntos no alineados de $\mathbb{R}^2$. Sea $\mathcal{T}$ el triángulo de vértices $V = \{x_1, x_2, x_3\}$. Demostrar que todo punto de $\mathcal{T}$ es combinación convexa de los vértices en V.

B. Demostrar que todo x de la forma (12) se puede escribir como combinación convexa de x_1 y de un punto z que, a su vez, es combinación convexa de los $x_2, \dots, x_m$.

C. Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Demostrar que f es convexa si y sólo si para todo x de la forma (12) se verifica

$$f(x) \le t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \cdots + t_m f(x_m) \,.$$

D. Sea $V = \{ x_1, x_2, \dots, x_m \}$ y supongamos que f es convexa. Sea

$$M = \max\{ f(x_j) \;:\; j = 1, 2, \dots, m \} \,.$$

Consideremos el conjunto

$$K = \{ x \in \mathbb{R}^n \;:\; x \text{ es combinación convexa de los puntos en } V \} \,.$$

Demostrar que K es convexo y que

$$f(x) \le M \quad \text{para todo } x \in K \,.$$

48. A.

1. Demostrar que para todos los $a, b \in \mathbb{R}$ satisfacen

$$2\,a\,b \le a^2 + b^2 \,, \qquad 4\,a\,b \le (a+b)^2 \,.$$

¿Cuándo se cumple la igualdad?

2. Demostrar que todos los $a > 0$ y $b > 0$ con $a + b = 1$ cumplen

$$\Big(a + \frac{1}{a}\Big)^2 + \Big(b + \frac{1}{b}\Big)^2 \ge \frac{25}{2} \,.$$

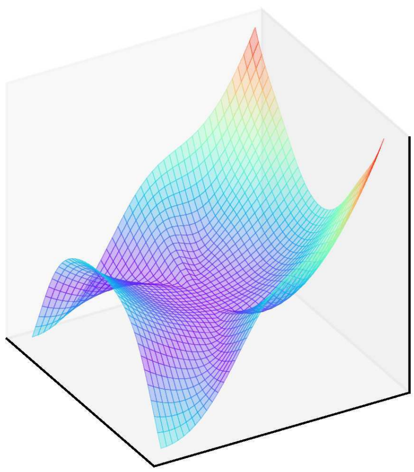
¿Cuáles son los valores de tales a y b para los que se alcanza la igualdad?

B. Considérese la función definida en los $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ mediante

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2\,x_1^2\,x_2 - \frac{4\,x_1^6\,x_2^2}{(x_1^4 + x_2^2)^2}\,, \qquad \text{si } x \neq 0\,,$$

y $f(0) = 0$. Demostrar que:

1. f es continua en $\mathbb{R}^2$.
2. La restricción de f a cada recta que pasa por 0 tiene un mínimo local estricto en 0.
3. 0 no es un mínimo local para f.



49. Dada una función f de clase C^∞ en un entorno de 0 en $\mathbb{R}^n$, demostrar que existen funciones $g_i\,, g_{ij}$ también de clase C^∞ en un entorno U de 0 y tales que

$$f(x) - f(0) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)\,x_i\,,$$

$$f(x) - f(0) - (df)_0 x = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\,x_i\,x_j\,,$$

en todo $x \in U$.

50. Considérese la función

$$f(x\,,y) = (\cosh x\, \cos y\,,\, \sinh x\, \sin y)\,,$$

definida en

$$\Omega = \{\,(x\,,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x > 0\,\}\,.$$

1. Demostrar que f es local pero no globalmente invertible en Ω . Calcular $\det Df(x\,,y)$.

2. Calcular los transformados mediante f de los conjuntos

$$V_a = \{\,(a\,,y)\ :\ y\in\mathbb{R}\,\}\,,\qquad H_b = \{\,(x\,,b)\ :\ x>0\,\}\,,$$

donde $a>0$ y $b\in\mathbb{R}$.

3. Demostrar que f es inyectiva en

$$\Omega_0 = \{\,(x\,,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x>0\,,\ 0<y<2\pi\,\}\,.$$