Ejercicios 38 a 43

38. Considérese el conjunto

$$M = \{ (1 - \mathrm{e}^{-t}) \left(\cos t , \sin t \right) \, : \, t \geq 0 \},$$

para demostrar:

1. $M \cap \mathbb{S}^1 = \emptyset$, $\mathbb{S}^1 \subset \overline{M}$ y $\overline{M} = M \cup \mathbb{S}^1$.
2. M es conexo por arcos.
3. $\overline{M}$ es conexo.
4. $\overline{M}$ no es conexo por arcos.

39. A. Sea (X , d) un espacio métrico.

1. Demostrar que son equivalentes:
   a. (X , d) es conexo.
   b. Todo $M \subset X$, $M \neq \emptyset$, $M \neq X$, verifica $\partial M \neq \emptyset$.
2. Para cada $p \in X$, sea C_p la componente conexa de X que contiene a p. Demostrar que C_p es un subconjunto cerrado en (X , d).
   En particular, toda componente conexa de X es un subconjunto cerrado en (X , d).

B. Sea Ω un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \emptyset$ y $\Omega \neq \mathbb{R}^n$.
Dada K, una componente conexa de $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, demostrar:

1. K es cerrado en $\mathbb{R}^n$.
2. $\partial K \subset \partial \Omega$, $K \cap \overline{\Omega} \neq \emptyset$ y $K \cup \overline{\Omega}$ es conexo.
3. Supongamos que $f : \mathbb{R}^n \setminus K \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y que $f\big(\mathbb{R}^n \setminus K\big) \subset \{0 , 1\}$. Se verifica:
   a. f es constante en Ω.
   b. Pongamos, por ejemplo, que $f \equiv 0$ en Ω.
   Para cada $p \in \mathbb{R}^n \setminus K$ con $p \notin \Omega$, considérese C_p, la componente conexa de $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ que contiene a p, para demostrar que $f(p) = 0$.

c. $\mathbb{R}^n \setminus K$ es conexo.

40. A. Considérese el espacio métrico $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ para calcular, para cada $q \in \mathbb{Q}$, la componente conexa que contiene a q.

B. Decimos que un espacio métrico (X, d) es *localmente conexo en* $p \in X$ cuando para cada abierto A con $p \in A$ existe G, abierto y conexo con $p \in G \subset A$. El espacio $(X\, d)$ se dice *localmente conexo* cuando es localmente conexo en cada uno de sus puntos.

1. Comprobar que el conjunto

$$M = \{\, (0, y) \, : \, -1 \le y \le 1 \,\} \cup \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x}\right) \, : \, 0 < x \le 1 \right\}$$

no es localmente conexo en ninguno de sus puntos $(0, y), -1 \le y \le 1$. Demostrar también que M es conexo.

2. Demostrar que si (X, d) es localmente conexo entonces también es localmente conexo todo subconjunto abierto de X.

3. Demostrar que son equivalentes:

   a. (X, d) es localmente conexo.

   b. Toda componente conexa de un abierto es abierta.

41. A. Demostrar que no existe ninguna función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable y con la siguiente propiedad:

Existe $p \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $D_{\mathbf{u}} f(p) > 0$ *para todo vector* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.

B. Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ que cumpla:

Existe un vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ *tal que* $D_{\mathbf{u}} f(p) > 0$ *para todo punto* $p \in \mathbb{R}^n$.

42. Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1. Demostrar que si

$$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}} Df(x) \, \boldsymbol{\xi} > 0 \quad \text{para todo punto } x \in \mathbb{R}^n \text{ y todo vector } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$$

entonces f es inyectiva en $\mathbb{R}^n$.

43. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Decimos que la función f es *convexa en* Ω cuando todos los $x, y \in \Omega$ y $0 \le t \le 1$ con $(1-t)\, x + t\, y \in \Omega$ satisfacen

$$f\big((1-t)\, x + t\, y\big) \le (1-t)\, f(x) + t\, f(y).$$

A. Considérese el conjunto

$$Q^{+} = \{ (x, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+1} \,:\, x \in \Omega ,\ f(x) \leq \lambda \} .$$

Demostrar que f es convexa en Ω si y solamente si el conjunto Ω^{+} es convexo en $\mathbb{R}^{n+1}$.

B. Pongamos, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$L_{\lambda} = \{ x \in \Omega \,:\, f(x) \leq \lambda \} .$$

1. Demostrar que el conjunto L_t es convexo siempre que f es convexa en Ω .
2. Mostrar un contraejemplo al recíproco de 1.

C. Supongamos que Ω es cerrado. Considérese la función

$$f(x) = \operatorname{dist}(x, \Omega) ,$$

estudiada en los ejercicios **8** y **9**.

Demostrar que f es convexa en $\mathbb{R}^n$ si y sólo si Ω es convexo.