Ejercicios 31 a 37

31. Supongamos que en cada t de un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$ tenemos

$$\mathbf{X}(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

tal que cada uno de sus elementos es

$$x_{ij} \,:\, I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{una función diferenciable en } I\,.$$

A. Sea

$$M \,:\, \overbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}^{n \text{ factores}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

una aplicación multilineal.
Demostrar que

$$f \,:\, I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida

$$f(t) = M\big(\mathbf{X}_{:\,,1}(t)\,, \mathbf{X}_{:\,,2}(t)\,, \ldots, \mathbf{X}_{:\,,n}(t)\big)$$

es diferenciable en I. Calcular cada $f'(t)$.

B. Cuando $\mathbf{X}(0) = \mathbf{I}_n$, calcular

$$\frac{d}{dt} \det \mathbf{X}(t)\Big|_{t=0}\,.$$

C. Demostrar que en todo $t \in I$ donde $\mathbf{X}(t)$ es invertible se verifica

$$\frac{d}{dt} \log \big|\det \mathbf{X}(t)\big| = \operatorname{Traza} \mathbf{X}^{-1}(t)\, \mathbf{X}'(t)\,.$$

D. Utilizar lo anterior y el ejercicio 30 para demostrar que

$$\det e^{\mathbf{A}} = e^{\operatorname{Traza} \mathbf{A}}\,,$$

para toda $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

32. Considérese la función $f(x)$ definida en los $x = (x_1\,, x_2) \in \mathbb{R}^2$ mediante

$$f(x) = \begin{cases} x_1 + x_2 + \dfrac{x_1^3\, x_2}{x_1^4 + x_2^2}\,, & x \neq 0\,, \\[2ex] 0\,, & x = 0\,. \end{cases}$$

A. Demostrar que f es continua en todo punto $x \in \mathbb{R}^2$.

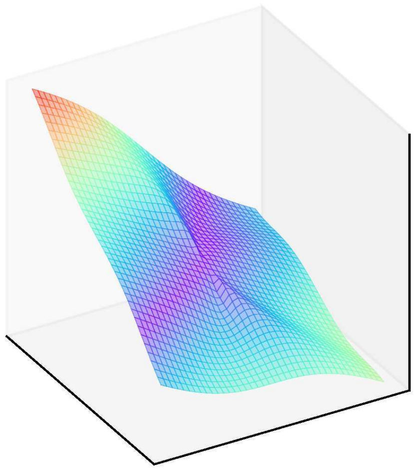
B. 1. Demostrar que para todo vector $\mathbf{u}$ de $\mathbb{R}^2$ existe $D_{\mathbf{u}}f(0)$, la derivada en 0 de f según $\mathbf{u}$, y calcularla. Demostrar que la función

$$\mathbf{u} \longrightarrow D_{\mathbf{u}}f(0)$$

es lineal.

2. Demostrar que f no es diferenciable en 0 .

C. Demostrar que f es diferenciable en todo $a \in \mathbb{R}^2$, $a \neq 0$. Calcular $(df)_a$, cada $D_{\mathbf{u}}f(a)$ y la matriz jacobiana $Df(a)$.



33. Considérese la función $f(x)$ definida en los $x = (x_1\,, x_2) \in \mathbb{R}^2$ mediante

$$f(x) = \begin{cases} (x_1^2 + x_2^2)\,\sin \dfrac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\,, & x \neq 0\,, \\ 0\,, & x = 0\,. \end{cases}$$

A. Demostrar que f es continua en todo punto $x \in \mathbb{R}^2$.

B. 1. Demostrar que las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ existen en todo $x \in \mathbb{R}^2$.

2. Estudiar la continuidad de estas dos funciones en 0 .

C. 1. Demostrar que f es diferenciable en 0 .

2. Demostrar que f es diferenciable en todo $x \in \mathbb{R}^2$.

34. Dada una función continua $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, considérese la función

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida

$$f(x) = \varphi(x) \sin x_1 , \qquad x = (x_1 , x_2) .$$

1. Demostrar que f es diferenciable en 0, incluso si φ no lo es.
2. Calcular, para cada vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, el valor de $(df)_0 \mathbf{u}$.

35. Demostrar que en cada uno de los casos siguientes la función f es de clase C^1. Calcular su diferencial en cada $(x , y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Dadas $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1, se define f mediante
$$f(x, y) = \int_0^x g(t, 0)\, dt + \int_0^y h(x, t)\, dt .$$
2. Dados $a \in \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua,
$$f(x, y) = \int_a^{x+y} g(t)\, dt .$$
3. Con a y g como en el apartado anterior,
$$f(x, y) = \int_a^{x \sin y} g(t)\, dt .$$

36. *El Teorema de* Euler *para funciones homogéneas.* Sea f una función definida en un abierto Ω de $\mathbb{R}^n$. Se dice que f es *homogénea de grado p en Ω* cuando

$$f(\lambda x) = \lambda^p f(x)$$

se verifica para todos los $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in \Omega$ tales que $\lambda x \in \Omega$.

1. Demostrar que si f es homogénea de grado p en Ω y es diferenciable en x entonces
$$\langle x , \nabla f(x) \rangle = p\, f(x) . \tag{10}$$
2. Demostrar que si f es diferenciable en Ω y satisface (10) en todo $x \in \Omega$ entonces f es homogénea de grado p en Ω.

37. A. Sea M un subconjunto conexo de un espacio métrico $(X\,,d\,)$.

1. Demostrar que $M_0 = M \cup \{p\}$ es conexo en $(X\,,d\,)$ siempre que p es un punto de acumulación de M.

2. Demostrar que si $M \subset \Omega \subseteq \overline{M}$ entonces Ω es conexo en $(X\,,d\,)$.

B. Considérense en $\mathbb{R}^2$ los conjuntos

$$L = \big\{\,(x,0)\;:\;-1 \le x \le 0\,\big\}\,, \qquad S = \Big\{\,\big(x\,,\sin\frac{1}{x}\big)\;:\;0 < x \le 1\,\Big\}\,.$$

1. Demostrar que L y S son conexos en $\mathbb{R}^2$.

2. Demostrar que

$$S_0 = S \cup \{(0\,,0)\} \qquad \text{es conexo en } \mathbb{R}^2\,.$$

3. Demostrar que $M = L \cup S$ es conexo en $\mathbb{R}^2$.

4. Demostrar que M no es arco-conexo.