Ejercicios 25 a 30

25. A. A partir de las normas

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,, \qquad \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\,, \qquad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1,2,\ldots,n} |x_i|$$

en $\mathbb{R}^n$, definimos las normas de matrices $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ inducidas

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max\left\{ \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_1 \ : \ \|x\|_1 = 1 \right\},$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \max\left\{ \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2 \ : \ \|x\|_2 = 1 \right\},$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max\left\{ \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_\infty \ : \ \|x\|_\infty = 1 \right\}.$$

Demostrar las identidades

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{j=1,2,\ldots,n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \tag{6}$$

y

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{i=1,2,\ldots,m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,. \tag{7}$$

B. Demostrar

$$\|\mathbf{A}\|_2 \le \sqrt{\|\mathbf{A}\|_1\, \|\mathbf{A}\|_\infty}\,.$$

C. Dada $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, demostrar:

1. $\|\mathbf{A}\|_2 = \max\left\{ |\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}| \ : \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\,, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m\,, \|\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{y}\|_2 = 1 \right\}$.
2. $\|\mathbf{A}\|_2 = \|\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\|_2$.
3. $\|\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\|_2 = \|\mathbf{A}\|_2^2$.

26. A. Comprobar que si los valores singulares de $\mathbf{A}$ son $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \cdots \ge \sigma_r > 0$, donde $r \le n$, entonces

$$\|\mathbf{A}\|_{\mathrm{F}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_r^2}\,.$$

En consecuencia,

$$\|\mathbf{A}\|_{\mathrm{F}} \leq \sqrt{r}\, \|\mathbf{A}\|_{2}\,.$$

B. Para cada una de las normas de matrices $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$, comprobar las desigualdades

$$\|\mathbf{A}\|_i \leq \alpha\, \|\mathbf{A}\|_j\,,$$

siendo α el valor que se encuentra en la fila i columna j de la tabla y siendo $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

	1	2	∞	F
1		$\sqrt{m}$	m	$\sqrt{m}$
2	$\sqrt{n}$		$\sqrt{m}$	1
∞	n	$\sqrt{n}$		$\sqrt{n}$
F	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{m}$	

27. A. Dada una matriz $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ se considera la función

$$f\,:\,\mathbb{R}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$$

definida

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\,.$$

Calcular $(df)_{\mathbf{A}}$ para cada $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

B. Considérese la función

$$f\,:\,\mathbb{R}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$$

definida mediante

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\,.$$

Dada $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, calcular $(df)_{\mathbf{A}}$.

C. Utilizar la regla de la cadena para calcular $(df)_{\mathbf{A}}$ siendo

$$f(\mathbf{X}) = \|\mathbf{X}\|_{\mathrm{F}}^2 = \operatorname{traza} \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\,.$$

D. Dadas matrices $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ y una función diferenciable $f(\mathbf{X})$ de las matrices $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, utilizar la regla de la cadena para calcular $(dg)_{\mathbf{A}}\mathbf{X}$, para cada $\mathbf{A}$ y cada $\mathbf{X}$, siendo

$$g(\mathbf{X}) = \mathbf{P}\, f(\mathbf{X}\mathbf{Q})\,.$$

¿Cómo es el tamaño de $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ cuando f y g toman valores en $\mathbb{R}^{a\times b}$?

28. A. Dada una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{k\times k}$, demostrar que $\|\mathbf{A}\| < 1$ implica:

1. $$\mathbf{I} - \mathbf{A} \quad \text{es invertible.}$$

2.
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{A}^n = \mathbf{0}\,.$$

3.
$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}^n\,. \tag{8}$$

4.
$$\left\|(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\| \le \sum_{n=0}^{\infty} \|\mathbf{A}\|^n = \frac{1}{1-\|\mathbf{A}\|}\,.$$

B. Considérese la función
$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^{-1}\,,$$
definida para las matrices invertibles $\mathbf{X}$. Utilizar la identidad
$$\mathbf{I}-\mathbf{X}^2 = (\mathbf{I}+\mathbf{X})\,(\mathbf{I}-\mathbf{X})\,,$$
para demostrar
$$f(\mathbf{I}-\mathbf{X}) - f(\mathbf{I}) - \mathbf{X} = \mathbf{X}^2\, f(\mathbf{I}-\mathbf{X})\,, \qquad \text{cuando} \quad \|\mathbf{X}\| < 1\,.$$
Como consecuencia, obtener que la diferencial de f en $\mathbf{I}$ es
$$(df)_{\mathbf{I}} = -\,\mathbf{I}\,.$$

C. Sea $\mathbf{A}$ una matriz invertible. Utilizar la identidad
$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^{-1}\, f(\mathbf{X}\mathbf{A}^{-1})$$
y la regla de la cadena para demostrar
$$(df)_{\mathbf{A}}\mathbf{X} = -\,\mathbf{A}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{A}^{-1}\,.$$

29. Dada $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, consideramos la sucesión de sumas parciales cuyo término general es
$$\mathbf{S}_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}\,\mathbf{X}^n\,.$$

1. Demostrar que esta sucesión $\left\{\mathbf{S}_N\right\}_N$ es una sucesión de CAUCHY.

   Su límite permite definir la función *exponencial de la matriz* $\mathbf{X}$,
$$\exp \mathbf{X} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,\mathbf{X}^n\,. \tag{9}$$

2. Calcular $\exp \mathbf{0}$ y $\exp \mathbf{I}$.

3. Demostrar que toda norma de matrices verifica

$$\left\|\exp \mathbf{X}\right\| \leq \mathrm{e}^{\|\mathbf{X}\|}\,.$$

4. Demostrar

$$\exp\left(\mathbf{I} + \mathbf{X}\right) = \exp \mathbf{I} \,\cdot\, \exp \mathbf{X}\,.$$

5. Calcular $(d\exp)_{\mathbf{I}}$, esto es, la diferencial en $\mathbf{I}$ de la función que lleva $\mathbf{X}$ a $\exp \mathbf{X}$. Calcular también $(d\exp)_{\mathbf{0}}$.

30. A. Supongamos que

$$f \,:\, \mathbb{R}^{k\times k} \longrightarrow \mathbb{R}^{k\times k}$$

es diferenciable en todo $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{k\times k}$. Calcular $(dg)_{\mathbf{A}}$, siendo $g(\mathbf{X}) = \mathbf{X}\, f(\mathbf{X})$.

B. Utilizar el Principio de Inducción y el apartado anterior para calcular $(df)_{\mathbf{A}}$ cuando

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^n,$$

siendo $n \in \mathbb{N}$.

Demostrar que

$$\mathrm{Traza}\,(df)_{\mathbf{A}}\mathbf{X} = n\,\mathrm{Traza}\,\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{X}\,.$$

C. Calcular una expresión para $(d\exp)_{\mathbf{A}}\mathbf{X}$. ¡Atención! no se pide el estudio de la convergencia de las series que intervienen en el cálculo.

D. Comprobar que $\mathbf{AX} = \mathbf{XA}$ implica

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}+\mathbf{X}} = \mathrm{e}^{\mathbf{A}}\,\mathrm{e}^{\mathbf{X}}$$

en la definición de exp en (9) y

$$(d\exp)_{\mathbf{A}}\mathbf{X} = \mathrm{e}^{\mathbf{A}}\mathbf{X} = \mathbf{X}\,\mathrm{e}^{\mathbf{A}}\,.$$

en la expresión obtenida en el apartado anterior.