UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID
Departamento de Matemáticas
J.R. Esteban

ANÁLISIS MATEMÁTICO

Grado en CC. MATEMÁTICAS, 2019-2020

Ejercicios 21 a 24

21. Considérese una función $f : [0\,,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ para demostrar:

1. Si f es continua en $[0\,,+\infty)$ y $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L \in \mathbb{R}$ entonces f es uniformemente continua en $[0\,,+\infty)$.
2. Si f es continua en $[0\,,+\infty)$ y tiene una asíntota, entonces f es uniformemente continua en $[0\,,+\infty)$.
3. Si f es uniformemente continua en $[0\,,+\infty)$ entonces existen constantes $A\,,B > 0$ tales que

$$|f(x)| \leq A\,|x| + B\,, \qquad \text{para todo } x \geq 0\,.$$

22. Sean $(X\,,d)$ un espacio métrico, $\Omega \subset X$ y una función acotada

$$f : \Omega \subset X \longrightarrow \mathbb{R}$$

A. Para cada $a \in \mathcal{A}c\,(\Omega)$ y $\delta > 0$ definimos

$$M(a,\delta) = \sup\,\big\{\, f(x) \;:\; x \in \Omega\,,\; d(x,a) < \delta \,\big\}\,,$$
$$m(a,\delta) = \inf\,\big\{\, f(x) \;:\; x \in \Omega\,,\; d(x,a) < \delta \,\big\}\,,$$

y la *oscilación de f en a* mediante

$$\omega(f,a) = \lim_{\delta\to 0} \big(M(a,\delta) - m(a,\delta)\big)\,.$$

Demostrar que este límite siempre existe y que f es continua en a si y solamente si $\omega(f,a) = 0$.

B. Considérese la función

$$R(t) = \sup\,\big\{\, |f(x) - f(y)| \;:\; x\,,y \in \Omega\,,\; d(x,y) < t \,\big\}\,,$$

definida en los $t \geq 0$. Demostrar que $R(t)$ es creciente y

$$0 = R(0) \leq L = \lim_{s\to 0+} R(s) \leq R(t) \leq \lim_{s\to+\infty} R(s) = \sup_{\Omega} f - \inf_{\Omega} f\,.$$

C. Sea ahora, para cada $t \geq 0$,

$$\omega(t) = \inf\,\big\{\, \alpha\,t + \beta \;:\; 0 \leq \alpha\,,\beta \;\text{ satisfacen }\; R(s) \leq \alpha\,s + \beta \text{ en todo } 0 \leq s \,\big\}\,.$$

Demostrar:

1. $R(t) \leq \omega(t)$ en todo $t \geq 0$.
2. ω es creciente en $[0, +\infty)$.
3. ω es cóncava en $[0, +\infty)$.
4. f es uniformemente continua en Ω si y sólo si $\omega(0) = 0$.

23. Sean $\mathbb{S}^1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \}$ y la función

$$g(t) = \begin{cases} \left(1 + t, \sqrt{1 - (1+t)^2}\right), & -2 \leq t \leq 0, \\ \left(1 - t, -\sqrt{1 - (1-t)^2}\right), & 0 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

Comprobar que g es sobreyectiva desde $[-2, 2]$ sobre $\mathbb{S}^1$.

1. Demostrar que ninguna función continua $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ puede ser inyectiva en $\mathbb{S}^1$.
2. Sean $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ continua y $z_0 \in \mathbb{R}^2$. Demostrar que todo entorno de z_0 contiene puntos p y q, con $p \neq q$, tales que $\|h(p)\|_2 = \|h(q)\|_2$.
3. Considérese g definida solamente en los $t \in [-2, 2)$. Demostrar que g es continua e inyectiva en $[-2, 2)$, pero que su inversa no es continua en $\mathbb{S}^1$.

24. A. Considérese la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ definida en los $x \in I = (0, 1]$. Demostrar que no existe ninguna función $g(x)$ continua en $[0, 1]$ y tal que $g(x) = f(x)$ en todo $0 < x \leq 1$.

B. Sean (X, d_1) e (Y, d_2) espacios métricos y $\Omega \subset X$. Considérese una función

$$f : \Omega \subset X \longrightarrow Y$$

continua en Ω. Demostrar que a lo sumo existe una función

$$F : \overline{\Omega} \subset X \longrightarrow Y$$

continua en $\overline{\Omega}$ y tal que $F(x) = f(x)$ en cada $x \in \Omega$.

C. Supongamos que (Y, d_2) es completo y que la función

$$f : \Omega \subset X \longrightarrow Y$$

es uniformemente continua en Ω.

1. Demostrar que si $\{x_n\}_n \subset \Omega$ es de Cauchy en (X, d_1), entonces $\{f(x_n)\}_n$ es de Cauchy en (Y, d_2).

2. Definimos una función

$$F : \overline{\Omega} \subset X \longrightarrow Y$$

como sigue: *Para cada* $x \in \overline{\Omega}$,

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

cuando $\{x_n\}_n \subset \Omega$ *satisface* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

3. Demostrar que F está bien definida en $\overline{\Omega}$ y que $F(x) = f(x)$ en cada $x \in \Omega$.

4. Demostrar que F es uniformemente continua en $\overline{\Omega}$.