UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID
Departamento de Matemáticas
J.R. Esteban

ANÁLISIS MATEMÁTICO

Grado en CC. MATEMÁTICAS, 2019-2020

Ejercicios 14 a 20

14. Sean $(X\,,d\,)$ un espacio métrico y A un subconjunto de X . Considérense el cierre $\overline{A}$ de A y el conjunto de puntos de acumulación de A, que denotamos por A' . Demostrar:

1. A' es cerrado en $(X\,,d)$.
2. Si $A\subset B$, entonces $A'\subset B'$.
3. $(A\cup B)'=A'\cup B'$.
4. $\big(\overline{A}\big)'=A'$.
5. $\overline{A}$ es cerrado en $(X\,,d)$.
6. $\overline{A}$ es el menor conjunto cerrado que contiene a A .

15. Sea $(X,d\,)$ un espacio métrico.

A. Demostrar que para todo par $a\,,b\in X$ con $a\neq b$ existen entornos de a y de b que son disjuntos.

B. Demostrar que todo subconjunto finito de X es cerrado en $(X,d\,)$.

C. Sean $A\subset X$ y a un punto de acumulación de A . Demostrar que para todo entorno U de a el conjunto $\big(U\setminus\{a\}\big)\cap A$ contiene un número infinito de puntos.

16. Dados un espacio métrico (X,d), $a\in X$ y $r>0$ definimos la *bola de centro* a *y radio* r mediante

$$B(a\,,r)=\big\{\,x\in X\;:\;d(x,a)<r\,\big\}$$

y también consideramos el conjunto

$$C(a\,,r)=\big\{\,x\in X\;:\;d(x,a)\le r\,\big\}\,.$$

A. Demostrar que el conjunto $B(a\,,r)$ es abierto en (X,d) y que el conjunto $C(a\,,r)$ es cerrado en $(X,d\,)$.

B. Sea $(E\,,\|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado.
Demostrar que el conjunto de puntos de adherencia de $B(a\,,r)$ en $(E\,,\|\cdot\|)$ coincide con $C(a\,,r)$.

C. En E definimos una métrica mediante

$$\rho(x,y)=\text{mín}\,\{\,1\,,\|x-y\|\,\}\,.$$

1. Demostrar que los subconjuntos abiertos de $(E\,,\|\cdot\|)$ y de $(E\,,\rho\,)$ son los mismos.
2. Comprobar que el conjunto de puntos de adherencia de $B(a\,,r)$ en $(E\,,\rho\,)$ es distinto de $C(a\,,r)$.

17. Sean $(X,d\,)$ un espacio métrico y $A\,,B\subset X$.

1. Supongamos que $A\subset B$.

   Demostrar que A es compacto en $(X,d\,)$ si y sólo si es compacto en el subespacio métrico $(B,d\,)$.
2. Demostrar que si A es cerrado en $(X,d\,)$ y B es compacto en (X,d), entonces $A\cap B$ es compacto en $(X,d\,)$.
3. Demostrar que la intersección de una colección arbitraria de subconjuntos de X compactos en $(X,d\,)$ es compacta en $(X,d\,)$.
4. Demostrar que la unión de un número finito de subconjuntos de X compactos en $(X,d\,)$ es compacta en $(X,d\,)$.

18. Sean $(X,d\,)$ un espacio métrico, $\Omega\subset X$ un abierto en $(X,d\,)$ y $K\subset\Omega$ un compacto en $(X,d\,)$. Considérese

$$d(K\,,\partial\Omega)=\text{distancia entre los conjuntos } K \text{ y } \partial\Omega\,.$$

A. Demostrar:

   1. $\partial\Omega$ es cerrado en $(X,d\,)$.
   2. $K\cap\partial\Omega=\emptyset$.
   3. Para cada $x\in K$ existe $\varepsilon=\varepsilon(x)>0$ tal que
   $$d(x,y)\geq\varepsilon\qquad\text{para todo } y\in\partial\Omega\,.$$
   4. Utilizar que K es compacto para demostrar que existe $\delta>0$ tal que
   $$d(x,y)\geq\delta>0\qquad\text{para todo } x\in K \text{ y todo } y\in\partial\Omega\,.$$
   5. Demostrar que $d(K\,,\partial\Omega)\geq\delta>0$.

B. Dar un ejemplo en $\mathbb{R}^2$ en el que se tiene $K\subset\Omega$ con K cerrado y Ω abierto y las conclusiones de los apartados A.4 y A.5 son falsas.

19. Considérese el espacio métrico $(\mathbb{Q}\,,|\cdot|\,)$, formado por $\mathbb{Q}$ con la métrica heredada de $(\mathbb{R}\,,|\cdot|\,)$. Dados $a\,,b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, sea

$$J=\big\{\,q\in\mathbb{Q}\;:\;a<q<b\,\big\}\,.$$

Demostrar:

1. J es cerrado y acotado en $(\mathbb{Q}\,, |\cdot|)$.
2. J no es compacto en $(\mathbb{Q}\,, |\cdot|)$.

20. Considérense $(\mathbb{R}\,, |\cdot|)$ y también $(\mathbb{R}\,, d)$, donde

$$d(x,y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right| .$$

Comprobar que esta función $d(x,y)$ define una métrica en $\mathbb{R}$.

1. Representar gráficamente la función

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} .$$

   Demostrar que f es biyectiva, continua y con inversa continua entre estos dos espacios métricos. En particular, concluir que toda sucesión es simultáneamente convergente en ellos.

2. Estudiar si la sucesión $\{n\}_n$ es de CAUCHY o convergente en $(\mathbb{R}\,, d)$. ¿Es completo este espacio métrico?