Ejercicios 8 a 13

8. Sea (X,d) un espacio métrico.

A. Demostrar que la métrica satisface las siguientes propiedades:

1.
$$\big|d(x,y)-d(y,z)\big|\leq d(x,z)\,.$$
En particular, para cada $y\in X$ fijo, la función $d(\cdot\,,y)$ es uniformemente continua en X .

2. Si $x\,,y\in B(c,r)$ entonces $d(x,y)<2r$.

3. Si $B(x,r)\cap B(y,s)\neq\emptyset$ entonces $d(x,y)<r+s$.

B. Dado un subconjunto A de X , se define

$$\operatorname{dist}(x\,,A)=\operatorname{ínf}\big\{\,d(x,a)\;:\;a\in A\,\big\}\,. \tag{4}$$

1. Demostrar que todos los $x,y\in X$ satisfacen
$$\big|\operatorname{dist}(x,A)-\operatorname{dist}(y,A)\big|\leq d(x,y)\,.$$
En particular, la función $\operatorname{dist}(\cdot\,,A)$ es uniformemente continua en X .

2. Supongamos que existe $x_0\in X$ tal que $\operatorname{dist}(x_0,A)>0$. Demostrar que si $L\geq 0$ satisface
$$\big|\operatorname{dist}(x,A)-\operatorname{dist}(y,A)\big|\leq L\,d(x,y)\,,\qquad\text{para todos los } x\,,y\in X\,,$$
entonces $L\geq 1$.

C. Obsérvese que $A\subset\big\{\,x\in X\;:\;\operatorname{dist}(x,A)=0\,\big\}$. Demostrar que A es cerrado en $(X\,,d\,)$ si y sólo si

$$\big\{\,x\in X\;:\;\operatorname{dist}(x,A)=0\,\big\}\subset A\,. \tag{5}$$

9.

A. Sea (X,d) un espacio métrico. Demostrar que si A es compacto en $(X\,,d\,)$, entonces para cada $x\in X$ existe algún $a\in A$ tal que $\operatorname{dist}(x,A)=d(x,a)$.

B. Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclidea y sea K un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, propio y no-vacío.

1. Supongamos que K es cerrado y sea $x_0 \notin K$. Demostrar que existe $k \in K$ tal que

$$\|x_0 - k\|_2 \leq \|x_0 - \xi\|_2 \qquad \text{para todo} \quad \xi \in K \,.$$

Es decir, este $k \in K$ satisface

$$\|x_0 - k\|_2 = \operatorname{dist}(x_0 \,, K) \,.$$

2. Supongamos que K es, además, convexo y consideremos el semiespacio

$$H_k = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle \xi - k \,, x_0 - k \rangle_2 \leq 0 \right\}.$$

Demostrar que $K \subset H_k$.

10. Sea X un espacio vectorial normado.

A. Demostrar que si X es un espacio de Banach, entonces toda serie absolutamente convergente es convergente.

B. Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión de Cauchy en X. Demostrar que existe una sucesión $\{n_j\}_j \subset \mathbb{N}$, estrictamente creciente y tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \| x_{n_{j+1}} - x_{n_j} \| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \,.$$

C. Demostrar que es convergente toda sucesión de Cauchy que tiene una subsucesión convergente.

D. Demostrar que X es un espacio de Banach cuando toda serie absolutamente convergente es convergente.

11. A.

1. Demostrar que todos los $a \,, b \in \mathbb{R}$ positivos satisfacen

$$\frac{a+b}{1+a+b} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} \,.$$

2. Demostrar que todos los $a \,, b \in \mathbb{R}$ cumplen

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} \,.$$

B. Considérese el espacio vectorial $\mathcal{S}$ formado por todas las sucesiones $X = \{x_n\}_n$ de números reales. Demostrar que

$$d(X,Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$$

es una métrica en $\mathcal{S}$.

12. Sea $\big(E\,, \|\cdot\|\big)$ un espacio vectorial normado y sea

$$C = \overline{B(0\,;1)} = \big\{\, x \in E \;:\; \|x\| \leq 1 \,\big\}$$

la bola unidad cerrada de E.

A. Demostrar que para todos los $r\,, s > 0$ se verifica

$$\begin{aligned} r\,C &= \big\{\, x \in E \;:\; \|x\| \leq r \,\big\}\,, \\ r\,C + s\,C &= (r+s)\,C\,. \end{aligned}$$

B. Demostrar que las dos identidades anteriores también son válidas para la bola unidad abierta de E.

13. Considérese el espacio vectorial ℓ^2 formado por todas las sucesiones $X = \{x_n\}_n$ de números reales para las que

$$\big\|X\big\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2$$

es convergente.

1. Demostrar que esta norma procede de un producto escalar $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ en ℓ^2.
2. Sea, para cada $j \in \mathbb{N}$, la sucesión $\mathbf{e}_j = \{e_{j,n}\}_n$ definida por

$$e_{j,n} = \begin{cases} 1\,, & n = j\,, \\ 0\,, & n \neq j\,. \end{cases}$$

   Considérese el conjunto $A = \big\{\, \mathbf{e}_j \;:\; j \in \mathbb{N} \,\big\}$. Demostrar que A es un subconjunto cerrado y acotado de ℓ^2.

3. Calcular cada

$$\big\|\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j\big\|_2\,.$$

   Demostrar que A no es compacto.