UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID
Departamento de Matemáticas
J.R. Esteban

ANÁLISIS MATEMÁTICO

Grado en CC. MATEMÁTICAS, 2019-2020

Ejercicios 1 a 7

1. A. Sea $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$ un producto escalar en un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y sea $\|\cdot\|$ la norma asociada. Demostrar las siguientes identidades:

1. *Identidad del paralelogramo.*
$$\Big\|\frac{x+y}{2}\Big\|^2+\Big\|\frac{x-y}{2}\Big\|^2=\frac{\|x\|^2+\|y\|^2}{2}\,.$$

2. *Identidad de polarización.*
$$\langle x\,,y\rangle=\Big\|\frac{x+y}{2}\Big\|^2-\Big\|\frac{x-y}{2}\Big\|^2.$$

Interpretar geométricamente estas identidades.

B. Supongamos ahora que E es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ dotado de una norma $\|\cdot\|$ que satisface la Identidad del Paralelogramo. Teniendo en cuenta la Identidad de Polarización definimos
$$B(x,y)=\Big\|\frac{x+y}{2}\Big\|^2-\Big\|\frac{x-y}{2}\Big\|^2,$$
que, obviamente, satisface $B(x,x)=\|x\|^2$, así como $B(x\,,y)=B(y\,,x)$ y $B(x,0)=0$.

1. Demostrar la identidad
$$2\,B(x\,,y)=B(x+z\,,y)+B(x-z\,,y)\,.$$
Comprobar que, en particular, se verifica
$$2\,B(x\,,y)=B(2x\,,y)$$
y también
$$B(x+z\,,y)=B(x\,,y)+B(z\,,y)\,.$$

2. Demostrar que todos los $p\,,q\in\mathbb{N}$, $q\neq 0$, satisfacen
$$B(p\,x\,,y)=p\,B(x\,,y)\,,\qquad q\,B(\frac{x}{q}\,,y)=B(x\,,y)\,.$$
Teniendo en cuenta que para cada y fijo la función $x\to B(x,y)$ es continua, concluir que
$$B(\lambda\,x\,,y)=\lambda\,B(x\,,y)\qquad \text{para todo}\quad \lambda\in\mathbb{R}\,,\lambda>0\,.$$

3. Demostrar que todo $\lambda \in \mathbb{R}\,, \lambda < 0$ satisface

$$\lambda\, B(x\,,y) - B(\lambda\, x\,,y) = \lambda\, B(0\,,y) = 0\,.$$

En conclusión, $B(x\,,y)$ es un producto escalar en E y su norma asociada es la norma original $\|\cdot\|$ de E.

2. Sea E un espacio vectorial real dotado de un producto escalar $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ y sea $\|\cdot\|$ la norma asociada.

A. 1. Comprobar que todos los $x\,,y \in E\setminus\{0\}$ satisfacen

$$\left\|\frac{1}{\|x\|}\,x - \|x\|\,y\right\| = \left\|\frac{1}{\|y\|}\,y - \|y\|\,x\right\|. \tag{1}$$

Dar una interpretación geométrica de esta identidad.

2. Demostrar que todos los $0 < \|x\| < r$ e $\|y\| = r$ verifican

$$\|x - y\| = \frac{\|x\|}{r}\left\|\frac{r^2}{\|x\|^2}\,x - y\right\|. \tag{2}$$

Interpretar geométricamente esta identidad.

B. Demostrar que todos los $x\,,y \in E$ satisfacen

$$\langle x\,,y\rangle\,\big(\|x\| + \|y\|\,\big) \leq \|x\|\,\|y\|\,\|x+y\|\,.$$

Comprobar que la desigualdad es falsa cuando $\langle x\,,y\rangle$ se sustituye por $\big|\langle x\,,y\rangle\big|$.

3. Considérense las funciones

$$A(x,y) = \max\,\left\{\,2\,|x|\,,\sqrt{x^2+y^2}\,\right\},$$

$$B(x,y) = \max\,\left\{\,|x-y|\,,\,|y|\,\right\},$$

definidas en $\mathbb{R}^2$.

Demostrar que estas funciones son normas en $\mathbb{R}^2$. Dibujar la bola unidad de cada una de ellas. Comprobar que para $A(x,y)$ la desigualdad triangular puede ser una igualdad incluso para vectores que son linealmente independientes

4. A. Sean E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y d una distancia en E . Demostrar que son equivalentes:

1. Existe una norma $\|\cdot\|$ en E tal que $d(x,y)=\|x-y\|$.
2. La función d satisface:

$$\left\{\begin{aligned} d(\lambda\, x\,,\lambda\, y) &= |\lambda|\, d(x\,,y)\,, \\ d(x+z,y+z) &= d(x,y)\,, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

   en todos los $x\,,y\,,z\in E$ y $\lambda\in\mathbb{R}$.

B. Comprobar que las funciones

$$d_1(x,y)=\text{mín}\,\big\{1\,,|x-y|\,\big\}\,,$$
$$d_2(x,y)=|x-y|+\big||x|-|y|\big|$$

son distancias en $\mathbb{R}$ y que definen los mismos abiertos en $\mathbb{R}$ que la distancia estándar $|x-y|$. Estudiar si estas dos distancias satisfacen las identidades en (3).

C. Considérese el conjunto

$$X=\{\,x\in\mathbb{R}^2\,:\,\|x\|_2\le 1\,\}\,,$$

donde definimos

$$d(x,y)=\|x-y\|_2\quad\text{si existe } t>0 \text{ tal que } y=t\,x\,,$$

y

$$d(x,y)=\|x\|_2+\|y\|_2\quad\text{en cualquier otro caso}\,.$$

1. Comprobar que $(X,d\,)$ es un espacio métrico.
2. Calcular y representar gráficamente $B(x,r)$ para cada $x\in X$ y $r>0$.

5. Considérese el espacio vectorial $\mathbb{R}^{m\times n}$ formado por las matrices $m\times n$ de números reales.

A. Demostrar que

$$\langle\mathbf{A}\,,\mathbf{B}\rangle=\text{traza}\,\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{B}$$

es un producto escalar. ¿Cuál es, de entre las normas de matrices, la norma asociada a este producto escalar?

Demostrar que

$$\big|\text{traza}\,\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{B}\big|^2\le\text{traza}\,\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\,\cdot\,\text{traza}\,\mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{B}\,.$$

B. Supongamos ahora que $m=n$. Demostrar:

1. $\big|\text{traza}\,\mathbf{A}\big|^2\le n\;\text{traza}\,\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}$.
2. $\text{traza}\,\mathbf{A}^2\le\text{traza}\,\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}$.

3.
$$\operatorname{traza} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} \le \frac{\operatorname{traza} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} + \operatorname{traza} \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}}{2}\,.$$

C. Seguimos suponiendo que $m = n$. Considérense los subespacios vectoriales $\mathcal{S}_n$ y $\mathcal{K}_n$ formados por las matrices simétricas y antisimétricas, respectivamente.

1. Demostrar que $\mathcal{K}_n$ es el complemento ortogonal de $\mathcal{S}_n$.
2. Dada $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ¿cuál es su proyeccción ortogonal sobre $\mathcal{S}_n$?
3. Calcular la distancia entre $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y el subespacio $\mathcal{S}_n$.

6. Considérese el espacio vectorial $\mathbb{R}^{n+1}$. En el conjunto $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{\mathbf{0}\}$ definimos la siguiente relación de equivalencia:

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \quad \textit{si y sólo si} \quad \text{existe} \quad \lambda \in \mathbb{R}\,, \lambda \neq 0 \text{ tal que } \mathbf{y} = \lambda\,\mathbf{x}\,.$$

Designamos por $\mathbb{P}^n$ el conjunto cociente de $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{\mathbf{0}\}$ por esta relación de equivalencia. Para cada par de puntos $\mathrm{X}\,,\mathrm{Y} \in \mathbb{P}^n$ definimos

$$d\,(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \min\Big\{\sum_{j=1}^{n+1}\Big|\frac{x_j}{\|\mathbf{x}\|_2} - \frac{y_j}{\|\mathbf{y}\|_2}\Big|,\ \sum_{j=1}^{n+1}\Big|\frac{x_j}{\|\mathbf{x}\|_2} + \frac{y_j}{\|\mathbf{y}\|_2}\Big|\Big\},$$

donde $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son vectores de X e Y , respectivamente.

Demostrar que d es una función bien definida en $\mathbb{P}^n$ y que $\big(\mathbb{P}^n, d\big)$ es un espacio métrico.

Indicación: Obsérvese que de cada punto $\mathrm{X} \in \mathbb{P}^n$ siempre se puede tomar un vector $\mathbf{x}$ con $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$.

7. Consideremos en $\mathbb{R}^n$ la norma

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{1/p},$$

donde $1 \le p < +\infty$.

A. Dados $1 \le p < q < +\infty$, demostrar:

1. Si $\|x\|_p = 1$, entonces $\|x\|_q \le 1$.
2. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, se verifica

$$\|x\|_q \le \|x\|_p\,.$$

B. Demostrar que para todo $0 < \alpha < 1$ se verifica

$$\left|a^\alpha - b^\alpha\right| \leq |a - b|^\alpha\,, \qquad \text{en todos los } 0 < a\,, b \in \mathbb{R}\,.$$

C. Sea ahora

$$\|x\|_\infty = \text{máx}\,\big\{\,|x_i|\,:\,i = 1\,,2\,,\ldots\,,n\,\big\}\,.$$

Demostrar que todo $x \in \mathbb{R}^n$ satisface

$$\lim_{p\to+\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty\,.$$