# 6. Probabilidad I

Eugenio Hernández

Universidad Autónoma de Madrid

COMPLEMENTOS PARA LA FORMACIÓN DISCIPLINAR EN MATEMÁTICAS
Curso 2017-2018

# 6.1. Frecuencia y probabilidad. Modelos de probabilidad

### Fenómeno aleatorio

Un fenómeno o experimento es aleatorio si puede dar lugar a varios posibles resultados sin que pueda predecirse exactamente que va a ocurrir en cada experimento.

John Kerrich, matemático inglés, estuvo prisionero durante la Segunda Guerra Mundial. En la soledad de su celda lanzó una moneda 10.000 veces y anotó las veces que salió cara:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Nº de lanzamientos | 10 | 30 | 5000 | 10000 |
| Caras | 4 | 17 | 2523 | 5067 |
| Proporción | $0,4$ | $0,56$ | $0,507$ | $0,5067$ |

**En un fenómeno aleatorio la tendencia a largo plazo de cada uno de los resultados es predecible**

## Lanzamiento de una moneda con EXCEL.

=ALEATORIO()
Produce un número aleatorio mayor o igual a 0 y menor que 1.

**La tecla F9 produce un nuevo número aleatorio**

=SI(ALEATORIO()$<$ 0,5;0;1)
Si el número aleatorio es menor que 0,5 pone un 0 (que puede ser CARA) y en caso contrario pone 1 (que puede ser CRUZ).

★ Repetir las veces que se desee.

=CONTAR.SI(Celda1:Celda2;"$=$ 0")
Cuenta el número de ceros en las celdas entre Celda1 y Celda2.

La probabilidad de un resultado en un experimento aleatorio es la proporción de veces que el resultado ocurre en un número infinito de pruebas:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\text{N}^{\text{o}} \text{ de veces que aparece el resultado}}{\text{N}^{\text{o}} \text{ de veces } n \text{ que se hace el experimento}}$$

**Descripción matemática de la probabilidad.**

### ESPACIO MUESTRAL

El espacio muestral $E$ de un experimento aleatorio es el conjunto de todos los resultados posibles que pueden obtenerse en el experimento.

### SUCESO

Un suceso es un subconjunto del espacio muestral $E$. Los sucesos con un solo elemento se llaman elementales o simples y el resto sucesos compuestos.

★ Poner ejemplos.

El siguiente paso es asignar probabilidades a los sucesos del espacio muestral. Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de todos los posibles sucesos de un experimento. La colección $\mathcal{A}$ debe tener estructura de álgebra de sucesos (no vacía, cerrada frente a uniones y complementarios). Si $E$ es finito, $\mathcal{A}$ puede ser todos los subconjuntos de $E$.

### Asignación de probabilidades

Dado un espacio muestral $E$ y un álgebra de sucesos $\mathcal{A}$, una probabilidad es una aplicación $p : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$ tal que
1. $p(E) = 1$.
2. Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ son sucesos incompatibles dos a dos (es decir, disjuntos dos a dos), $p(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} p(A_n)$ .

**NOTA**: Si $E$ es finito, la condición 2. puede sustituirse por: si $A \cap B = \emptyset, p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ .

## Regla de Laplace

Si el espacio muestral $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es finito y todos los sucesos elementales son equiprobables (es decir, $p(x_1) = p(x_2) = \ldots p(x_n) = 1/n$), para cualquier suceso $\mathcal{A}$ se tiene:

$$p(A) = \frac{\text{N}^{\text{o}} \text{ de elementos de } A}{n}.$$

**Ejercicio 1.** Se lanza un dado equiprobable. Escribe el espacio muestral y la asignación de probabilidades a cada uno de los suscesos elementales.

**Ejercicio 2.** Se lanzan dos dados equiprobables y se anota la suma. Escribe el espacio muestral y la asignación de probabilidades a cada uno de los suscesos elementales.

**Ejercicio 3.** A partir de los axiomas de probabilidad deduce lo siguiente: i) $p(A^c) = 1 - p(A)$, ii) $p(\emptyset) = 0$, iii) Si $B \subset A$, $p(A - B) = p(A) - p(B)$, iv) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

# 6.2. Probabilidad condicionada. Sucesos independientes.

### PROBABILIDAD CONDICIONADA

Dados dos sucesos $A$ y $B$, la probabilidad de $B$ condicionada a $A$ es la proporción de veces que ocurre $B$ entre las que ha ocurrido $A$: $p(B/A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)}, \quad p(A) > 0$.

**Ejercicio 4.** Al lanzar dos monedas equiprobables se sabe que ha salido al menos una cara. ¿Cuál es ahora la probabilidad de que hayan salido dos caras?

**Ejercicio 5.** Se ha realizado una encuesta a 120 personas sobre cuál de los periódicos $A$, $B$ y $C$ leen habitualmente. Los resultados son que 70 leen $A$, 45 leen $B$, 35 leen $C$, 5 ninguno de los tres, 15 leen $A$ y $B$, 5 $B$ y $C$, 20 $A$ y $C$, y 5 leen los tres periódicos. Si se sabe que una persona lee al menos dos periódicos, ¿cuál es la probabilidad de que lea $B$? ¿Es cierto que siempre lee $A$?

De la definición de probabilidad condicionada se deduce $p(A \cap B) = p(A) \times p(B/A)$, que es la regla del producto para hallar la probabilidad de que $A$ y $B$ ocurran a la vez.

### Sucesos independientes

Dados dos sucesos $A$ y $B$, se dice que $B$ es independiente de $A$, si $p(B/A) = p(B)$, es decir, la probabilidad de $B$ no varía antes y después de que haya ocurrido $A$.

**NOTA**: De la regla del producto se deduce que si $B$ es independiente de $A$, $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$. Además, si $B$ es independiente de $A$ se tiene:

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(B/A) \times p(A)}{p(B)} = \frac{p(B) \times p(A)}{p(B)} = p(A),$$

por lo que $A$ es también independiente de $B$ y podemos hablar de sucesos independientes.

**Ejercicio 6.** Una caja contiene 8 bolas: 6 son rojas (R) y 2 son negras (N). Se realizan dos extracciones suponiendo que la bola extraida se devuelve a la caja antes de la segunda extracción. Calcula la probabilidad de extraer una bola de cada color.

A veces es difícil obtener la probabilidad del suceso $A \cap B$, pero es fácil calcular $p(B/A)$ o $p(A/B)$, por lo que se puede usar la regla del producto para calcular $A \cap B$.

**Ejercicio 7.** En una empresa trabajan 10 personas: 4 de ellas son fijas y 6 tienen contrato temporal. a) ¿cuál es la probabilidad de que al seleccionar al azar a tres de ellas, todas tengan un contrato temporal? b) ¿cuál es la probabilidad de que al seleccionar al azar a tres de ellas, al menos dos tengan un contrato temporal?

**Ejercicio 8.** Un sistema de ordenadores asigna códigos de conexión a los usuarios eligiendo cuatro letras al azar (de entre 26 del alfabeto) ¿Cuál es la probabilidad de que un código no tenga $X$?

## Variaciones, permutaciones, combinaciones.

A. Variaciones sin repetición de $n$ elementos tomados de $r$ en $r$ es el número de grupos ordenados de $r$ elementos que pueden hacerse con los $n$ elementos sin repetirlos:

$$V_n^r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}\,.$$

B. Variaciones con repetición de $n$ elementos tomados de $r$ en $r$ es el número de grupos ordenados de $r$ elementos que pueden hacerse con los $n$ elementos pudiendo repetirse:

$$VR_n^r = n \times n \times n \dots n = n^r\,.$$

C. Permutaciones de $r$ elementos son los grupos ordenados de $r$ elementos sin repetición:

$$P_r = V_r^r = r(r-1)(r-2)\dots 2 \times 1) = r!\,.$$

D. Combinaciones de $n$ elementos tomados de $r$ en $r$ es el número de grupos de $r$ elementos que pueden hacerse con los $n$ elementos sin distinguir el orden (dos con distinto orden e iguales elementos son la misma combinación) y sin repetirse:

$$C_n^r = \frac{V_n^r}{P_r} = \frac{n!/(n-r)!}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}\,.$$

**Ejercicio 9.** Se reparte una mano de 7 cartas de una baraja de 40 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que la mano contenga el As de oros y el 3 de oros?

La regla del producto, $P(A \cap B) = p(A) \times P(B/A)$, es muy útil para calcular probabilidades. Ayuda hacer un diagrama en forma de árbol con la probabilidades de la intersección de dos sucesos de pruebas consecutivas.

**Ejercicio 10.** Se lanza una moneda. Si sale cara se acude a una urna que contiene 4 bolas blancas y 2 negras para extraer una bola. Si sale cruz se acude a una urna que contiene 3 bolas blancas y 3 negras para extraer una bola.
a) Escribe el espacio muestral y determina las probabilidades de cada suceso elemental.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraida sea blanca?
c) Si la bola extraida ha sido blanca, ¿ cuál es la probabilidad de que la bola extraida sea de la primera urna?

**Ejercicio 11.** ¿Cuál es la probabilidad de que en una clase de 50 alumnos, al menos dos tengan el mismo cumpleaños?

**Ejercicio 12.** Un diagnóstico para un cierto tipo de cáncer tiene probabilidad 0,96 de resultar positivo si el paciente tiene cáncer; el 95 % de los individuos sin cáncer dan negativo. Se elige un individuo al azar en una población en la que se sabe que el 1 % tiene cáncer.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que el individuo dé positivo y tenga cáncer? ¿Y que dé negativo y tenga cáncer?
b) Si un individuo ha dado resultado negativo, ¿cuál es la probabilidad de que tenga cáncer?