

## 4. GEOMETRÍA // 4.4. ÁREAS Y VOLÚMENES.

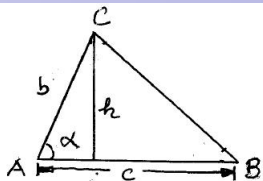
Eugenio Hernández

COMPLEMENTOS PARA LA FORMACIÓN DISCIPLINAR  
EN MATEMÁTICAS.

## 4.4.1. Áreas de polígonos.

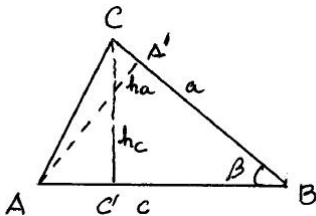
El área de un triángulo es

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}cb \sin \alpha$$



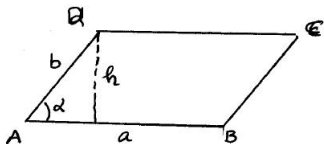
Si el triángulo es equilátero y llamamos  $\ell$  a la longitud de cada uno de sus lados, su área es  $\frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2$ .

**Ejercicio 1.** Demostrar que el área de un triángulo es independiente de la base y la altura elegidas. (Indicación: Usar el teorema de Tales para probar que  $\frac{1}{2}ch_c = \frac{1}{2}ah_a$  en el triángulo de la figura)



El área de un paralelogramo es

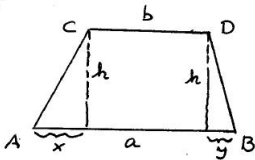
$$\text{Área}(ABCD) = ah = ab \sin \alpha$$



Si el paralelogramo es un cuadrado y llamamos  $\ell$  a la longitud de cada uno de sus lados, su área es  $\ell^2$ . El área de un cuadrilátero cualquiera se puede calcular por triangulación.

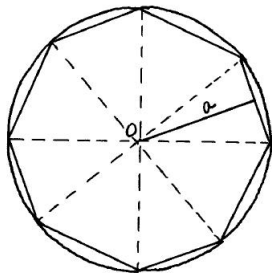
**Ejercicio 2.** Demostrar que el área de un trapecio cuyas longitudes de los lados paralelos son  $a$  y  $b$  y su altura  $h$  es

$$\text{Área}(ABCD) = \frac{a+b}{2} h.$$



Si un polígono es regular, de  $n$  lados, lo más fácil es descomponerlo en triángulos con vértice común en el centro del polígono. Si  $\ell$  es la longitud del lado, demostrar que su área es:

$$\text{Área} = \frac{n\ell^2}{4 \tan(\pi/n)}.$$



**Ejercicio 3.** Demostrar que el área de un pentágono regular cuyo lado tiene longitud  $\ell$  es

$$\frac{5(1 + \sqrt{5})}{4\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \ell^2.$$

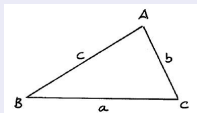
**Ejercicio 4.** Demostrar que el área de un hexágono regular cuyo lado tiene longitud  $\ell$  es

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} \ell^2.$$

## FÓRMULA DE HERÓN

Si  $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$  es el semiperímetro de un triángulo cuyos lados miden  $a$ ,  $b$  y  $c$ , se tiene

$$\text{Área}(ABC) = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}.$$

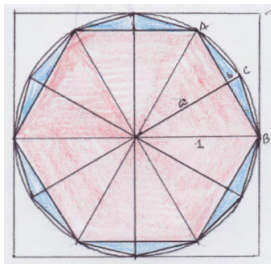


## 4.4.2. Área de un círculo.

En el área de un círculo aparece el número  $\pi$ . El número  $\pi$  es el cociente entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro.

Comparando los perímetros del hexágono regular inscrito y del cuadrado circunscrito a una circunferencia de radio 1 con su perímetro se obtiene la estimación:

$$3 = \frac{6}{2} < \pi = \frac{\text{perímetro}}{\text{diámetro}} < \frac{8}{2} = 4.$$



## Método de Arquímedes para calcular $\pi$ .

Inscribe un dodecágono regular en una circunferencia dividiendo en dos partes iguales los lados de un hexágono regular. Se tienen las fórmulas:

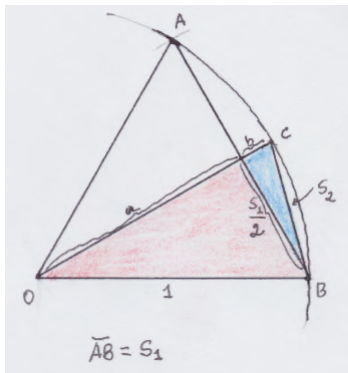
$$a = \sqrt{1 - \left(\frac{s_1}{2}\right)^2}, \quad b = 1 - a,$$

$$s_2 = \sqrt{b^2 + \left(\frac{s_1}{2}\right)^2}.$$

Este conjunto de fórmulas permite calcular el valor  $s_2$  del lado del dodecágono regular usando  $s_1 = 1$ .

El lado del polígono regular de 24 lados inscrito en la circunferencia se obtiene con la misma fórmula sustituyendo el valor de  $s_1$  por el valor obtenido de  $s_2$ .

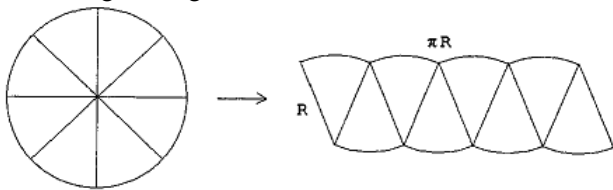
Con estas formulas se puede aproximar el valor de  $\pi$  usando una hoja de cálculo.



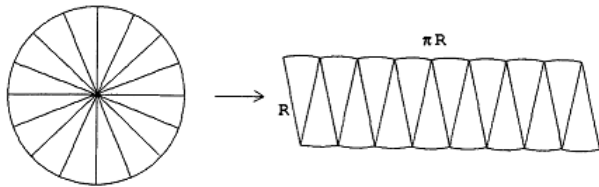


## Área de un círculo de radio $R$ .

Divide el círculo en ocho partes iguales y reordénalas como se muestra en la figura siguiente:



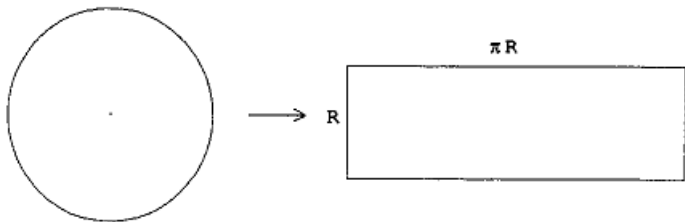
Repite el proceso dividiendo el círculo en 16 pedazos. Se obtiene:



Gráficos tomados de H. Massmann, *Arquímedes: el área y el volumen de una esfera*, Revista del Profesor de Matemáticas.

## Área de un círculo de radio $R$ .

Repite el proceso indefinidamente. Al final se obtiene un rectángulo de base  $\pi R$  y de altura  $R$ .



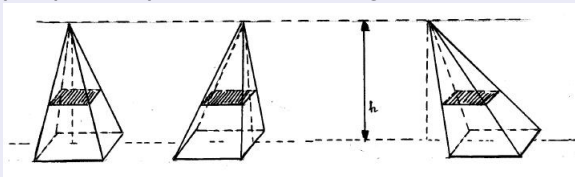
El área de este rectángulo,  $\pi R^2$ , coincide con el área del círculo de radio  $R$ .

**Ejercicio 5.** Calcula el área de un círculo de radio  $R$  usando integración.

## 4.4.3. Volúmenes.

### PRINCIPIO DE CAVALIERI

Dos sólidos que tienen secciones con la misma área al cortarlos por planos paralelos tienen igual volumen,



y este volumen se calcula haciendo las *sumas infinitas* de las áreas de todas las secciones:

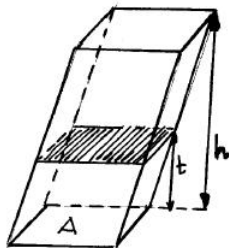
$$V = \int_0^h A(t) dt,$$

donde  $A(t)$  es el área de la sección a altura  $t$ .

Para un prisma con área de la base  $A$ , todas las secciones tienen la misma área,  $A(t) = A$ , y por tanto,

$$V = \int_0^h A dt = Ah.$$

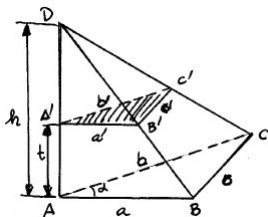
Es decir, el volumen de un prisma se calcula multiplicando el área de su base por la altura.



## VOLUMEN DE UNA PIRÁMIDE DE BASE TRIANGULAR

$$V = \frac{1}{3}(\text{Área de la base}) \times (\text{altura})$$

D/.

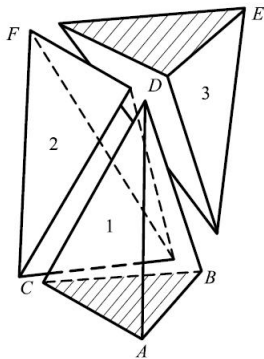
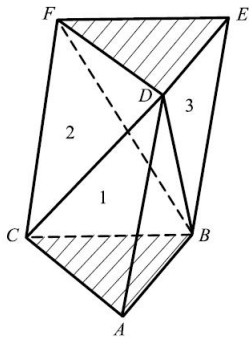


Con referencia a la figura, mostrar que el área  $A(t)$  del triángulo  $A'B'C'$  es

$$A(t) = A \frac{(h-t)^2}{h^2},$$

donde  $A$  es el área de la base, y a continuación calcular la integral.

D/.



Las pirámides 1 y 3 tienen igual volumen porque tienen igual base y altura. Las pirámides 2 y 3 también tienen igual volumen porque pueden interpretarse con vértice común en  $D$  y con bases los triángulos coplanarios iguales  $CFB$  y  $FBE$ . Luego las tres pirámides tienen igual volumen.

**NOTA:** La fórmula anterior es válida para una pirámide de base poligonal cualquiera. Basta dividir la base en triángulos y aplicar el resultado para cada una de las pirámides que se forman en su interior con base triangular.

**Ejercicio 6.** Demostrar que el volumen de un tetraedro regular cuyo lado tiene longitud  $\ell$  es

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12} \ell^3 .$$

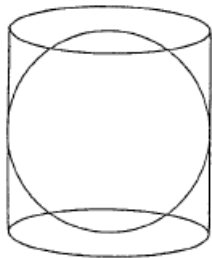
**Ejercicio 7.** Demostrar que el volumen de un octaedro regular cuyo lado tiene longitud  $\ell$  es

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3} \ell^3 .$$

## 4.4.4. Volumen de una esfera de radio $R$ .

**Ejercicio 8.** Usando el principio de Cavalieri, demuestra que el volumen de un cono cuya base tiene radio  $R$  es  $\frac{1}{3}\pi R^2 h$ , donde  $h$  es la altura del cono.

El cálculo del volumen de la esfera fue uno de los descubrimientos que Arquímedes más estimaba de todos los muchísimos que hizo en su vida. Llegó a demostrar de un modo muy original que el volumen de la esfera es igual a dos tercios del volumen del cilindro circular circunscrito a ella.

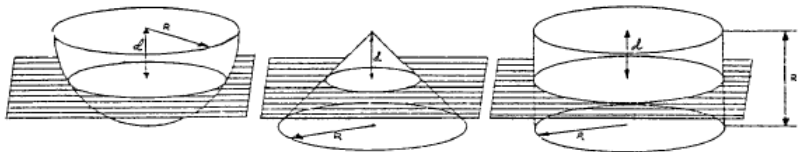


Tomado de la página Web de Miguel de Guzmán que se conserva en la UCM:

<http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/old/08sabormat/experimentgeometria/lamejor.htm>



Arquímedes imaginó una semiesfera y junto a ella un cilindro circular recto y un cono recto, ambos de base igual a un círculo máximo de la semiesfera. Algo así:



Arquímedes cortó las tres figuras por un plano paralelo a la base del cilindro y cono y se preguntó cómo serían las secciones determinadas por este plano en cilindro, semiesfera y cono.

**ARQUÍMEDES CONCLUYÓ:**

**Sección cilindro = Sección semiesfera + Sección cono**

Usando el principio de Cavalieri (esto no lo sabía Arquímedes, pero se imaginó que la suma de las áreas de rebanadas de una figura daba el volumen) se obtiene:

Volumen cilindro = Volumen semiesfera + Volumen cono

Como el volumen del cilindro es  $\pi R^3$  y el volumen del cono es  $\frac{1}{3}\pi R^3$ , se tiene que el volumen de la semiesfera es  $\frac{2}{3}\pi R^3$ . Por tanto:

$$\text{Volumen de la esfera de radio } R = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

**Ejercicio 9.** Calcula el volumen de una esfera de radio  $R$  usando integración.

## Área de una superficie esférica de radio $R$ .

La esfera puede considerarse como compuesta por un montón de pirámides de vértice el centro de la esfera y base de área muy pequeña  $S$  sobre la esfera. Utiliza esta idea para deducir el área de la superficie de una esfera de radio  $R$  a partir de su volumen.

**Ejercicio 10.** Calcula el área de la superficie de una esfera de radio  $R$  usando integración.