5. Análisis matemático // 5.2. Integración.

Eugenio Hernández

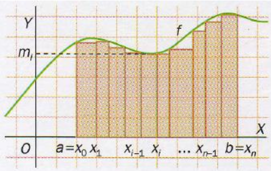
COMPLEMENTOS PARA LA FORMACIÓN DISCIPLINAR
EN MATEMÁTICAS
Curso 2017-2018

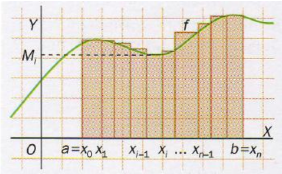
5.2.1. La integral como medida de áreas.

La definición de integral se hace con un procedimiento de aproximación mediante rectángulos.

Dada un función f acotada en un intervalo cerrado $[a, b]$, para una partición $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ del intervalo $[a, b]$, se definen las sumas inferiores y las sumas superiores de Riemann mediante:

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_1 - x_{i-1}) \quad \text{y} \quad S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_1 - x_{i-1})\,.$$





Definición de integral

Se dice que una función acotada es integrable en $[a, b]$ si se cumple que $\sup_{P\in\mathfrak{P}} s(f, P) = \inf_{P\in\mathfrak{P}} S(f, P)$ y este número común se escribe $\int_a^b f(x)dx$.

NOTA: Si f es integrable en $[a, b]$ se tiene que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) ,$$

para cualquiera que sea la elección de $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Teorema del valor medio para integrales

Si f es continua en $[a, b]$, existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a) .$$

5.2.2. El descubrimiento de Newton y Leibniz: el teorema fundamental del cálculo.

Teorema fundamental del cálculo

Si f es continua en $[a, b]$, la función integral $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es derivable en (a, b) y su derivada es $F'(x) = f(x)$.

Regla de Barrow

Si f es continua en $[a, b]$ y $G(x)$ es una primitiva de f (es decir $G'(x) = f(x)$) se tiene $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$.

Cambio de variable en la integral

Si f y g son derivables, a partir de la regla de la cadena se demuestra que $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$, lo que se interpreta como la sustitución $u = g(x), du = g'(x)dx$.

Integración por partes

Si f y g son derivables, a partir de la derivada de un producto se demuestra que

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx\,.$$

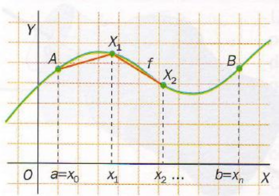
Ejercicio 1. Calcula el área de un círculo de radio R usando integración.

Ejercicio 2. Calcula $I = \int_0^1 x\ln(1+x^2)dx$.

Ejercicio 3. Dada la función $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$ estudie las asíntotas y la monotonía de f. Dibuje aproximadamente la gráfica de f. (Oposición Castilla y León, 2002)

LONGITUD DE UNA CURVA.

La longitud de una curva puede aproximarse por la longitud de una linea quebrada que une los puntos $(x_{i-1}, f(x_{i-1})$ y $(x_i, f(x_i))$, $i = 1, 2, \ldots, n$. La longitud de esta línea quebrada es:



$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1})^2} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,,$$

con $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, por el Teorema del valor medio.

LONGITUD DE UNA CURVA DERIVABLE

$$L(f : [a, b]) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx\,.$$

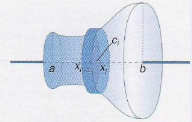
Ejercicio 4. Calcula la longitud de una circunferencia de radio R.

Ejercicio 5. Las ecuaciones paramétricas de una cicloide son $x(t) = R(t - \operatorname{sen} t)$, $y(t) = R(1 - \cos t)$. Halla la longitud del arco de cicloide entre los puntos $A = (0, 0)$ y $B = (2\pi R, 0)$.

VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN.

Por el principio de Cavalieri

$$V(f : [a, b]) = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \,.$$



Ejercicio 6. Calcula el volumen de una esfera de radio R.

SUPERFICIE LATERAL DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN.

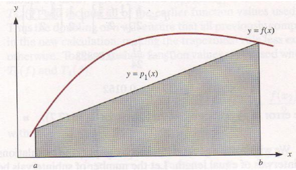
$$SL(f : [a, b]) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx\,.$$

Ejercicio 7. Calcula la superficie de una esfera de radio R.

Ejercicio 8. Prueba que el volumen del sólido de revolución generado por la gráfica de $y = 1/x$ en $[1, \infty)$ es finito, pero su superficie lateral no es finita.

5.2.4. Cálculo aproximado de la integral.

La regla del trapecio.



Si $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ no puede calcularse mediante primitivas o con reglas de integración, una solución es buscar una aproximación. Con la aproximacion lineal de la figura se obtiene la regla del **trapecio**: $T_1(f) = (b-a)\frac{f(b)+f(a)}{2}$.

Si el intervalo $[a, b]$ se divide en n subintervalos iguales cada uno de longitud $h = (b-a)/n$ se consigue la regla del **trapecio**:

$$T_n(f) = h[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)]$$

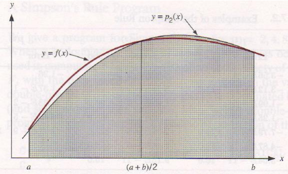
con $x_j = a + jh, j = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Si $f \in C^2([a, b])$, $|I(f) - T_n(f)| = \frac{h^2(b-a)}{2} f''(c_n)$ con $c_n \in [a, b]$.

La regla de Simpson (Thomas Simpson, 1710-1761).

Con una aproximacion cuadrática como en la figura se obtiene la regla del **Simpson**:

$$S_2(f) = \frac{(b-a)}{6}[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]\,.$$



Si el intervalo $[a, b]$ se divide en $2n$ subintervalos iguales cada uno de longitud $h = (b-a)/2n$ se consigue la regla de **Simpson**:

$$S_{2n}(f) = \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\cdots+4f(x_{2n-1})+f(x_n))]$$

con $x_j = a + jh, j = 0, 1, 2, \ldots, 2n\,.$

ERROR

Si $f \in C^4([a, b])$, $|I(f) - S_{2n}(f)| = \frac{h^4(b-a)}{180} f^{(4)}(c_n)$ con $c_n \in [a, b]$.