

# 5. ANÁLISIS MATEMÁTICO // 5.1. DERIVADAS Y APLICACIONES.

Eugenio Hernández

COMPLEMENTOS PARA LA FORMACIÓN DISCIPLINAR  
EN MATEMÁTICAS  
Curso 2017-2018

## 5.1.1. El problema de la tangente. Derivada.

★ Pierre de Fermat tenía una idea correcta de recta tangente a una curva en un punto  $P$ : “es la posición límite de las secantes  $PQ$  cuando  $Q$  se acerca a  $P$  sin abandonar la curva”.

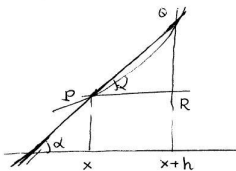
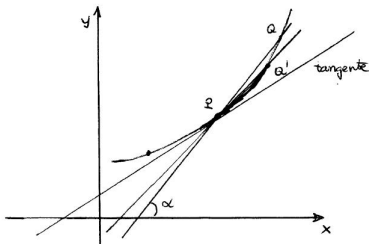
★ La recta que pasa por los puntos  $P = (x, f(x))$  y  $Q = (x + h, f(x + h))$  tiene como pendiente la expresión

$$\tan \alpha = \frac{|QR|}{|PR|} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

La posición límite se alcanza cuando  $h$  tiende a cero:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

y se llama **derivada** de la función  $f$  en el punto  $x$ .



**Ejercicio 1.** Usar la definición de derivada para demostrar que si  $f(x) = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene que  $f'(x) = nx^{n-1}$ .

**Ejercicio 2.** Usar la definición de derivada para demostrar que si  $f(x) = \operatorname{sen} x$  se tiene que  $f'(x) = \cos x$ .

**Ejercicio 3.** Demostrar que la función  $f(x) = |x|$  no es derivable en el punto  $x = 0$ .

**NOTA:** La derivada de una función  $s = f(t)$  en un punto coincide con la velocidad instantánea de un objeto cuya distancia recorrida en función del tiempo está dada por la función  $f$ .

**Poner archivo La bici.ggb**

# REGLAS DE DERIVACIÓN

## DERIVADA DE UNA SUMA

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

## DERIVADA DE UN PRODUCTO

$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ . En particular, si  $c$  es una constante  $(cf)'(x) = cf'(x)$ .

## DERIVADA DE UN COCIENTE

Si  $g(x) \neq 0$  se tiene  $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}$ .

## REGLA DE LA CADENA

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

## DERIVADA DE LA FUNCIÓN INVERSA

Si  $f^{-1}$  existe y  $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$  se tiene  $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ .

## Derivada de funciones elementales

Función	Derivada
$x^n, n = 1, 2, 3, \dots$	$n \cdot x^{n-1}$
$x^{-n}, n = 1, 2, 3, \dots$	$(-n) \cdot x^{-n-1}, x \neq 0$
$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}, n = 2, 3, 4, \dots$	$\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}, x \neq 0$
$x^a, a \in \mathbb{R}$	$a \cdot x^{a-1}, x > 0$
$\ln x$	$\frac{1}{x}, x > 0$
$\log_a x, a > 0, a \neq 1$	$\frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}, x > 0$
$e^x$	$e^x$
$a^x$	$(\ln a) \cdot a^x$
$\text{sen } x$	$\text{cos } x$
$\text{cos } x$	$-\text{sen } x$
$\text{tan } x$	$\frac{1}{\text{cos } x^2} = \text{sec}^2 x, \text{cos } x \neq 0$
$\text{arcsen } x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad -1 < x < 1$
$\text{arccos } x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad -1 < x < 1$
$\text{arctan } x$	$\frac{1}{1+x^2}$

## Derivada de funciones compuestas

Función	Derivada
$f(x)^n, n = 1, 2, 3, \dots$	$n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$
$f(x)^{-n}, n = 1, 2, 3, \dots$	$(-n) \cdot f(x)^{-n-1} \cdot f'(x), f(x) \neq 0$
$\sqrt[n]{f(x)}, n = 2, 3, 4, \dots$	$\frac{1}{n} (f(x))^{\frac{1}{n}-1} f'(x) \quad f(x) \neq 0$
$f(x)^a, a \in \mathbb{R}$	$a \cdot f(x)^{a-1} \cdot f'(x) \quad f(x) > 0$
$\ln f(x)$	$\frac{f'(x)}{f(x)} \quad f(x) > 0$
$\log_a f(x), a > 0, a \neq 1$	$\frac{1}{\ln a} \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \quad f(x) > 0$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} \cdot f'(x)$
$a^{f(x)}$	$(\ln a) \cdot a^{f(x)} \cdot f'(x)$
$\text{sen } f(x)$	$[\cos f(x)] \cdot f'(x)$
$\text{cos } f(x)$	$[-\text{sen } f(x)] \cdot f'(x)$
$\text{tan } f(x)$	$\frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} = [\sec^2 f(x)] f'(x), \cos f(x) \neq 0$
$\text{arcsen } f(x)$	$\frac{f'(x)}{\sqrt{1 - (f(x))^2}} \quad -1 < f(x) < 1$
$\text{arccos } f(x)$	$\frac{-f'(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}} \quad -1 < f(x) < 1$
$\text{arctan } f(x)$	$\frac{f'(x)}{1 + [f(x)]^2}$

**Ejercicio 4.** Calcular la derivada de la función  $f(x) = x^x$ .

**Ejercicio 5.** El coseno y el seno hiperbólico se definen por las fórmulas  $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  y  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ . Sus funciones inversas reciben el nombre de arcocoseno y arcoseno hiperbólico (arccosh y arcsenh). Calcular las derivadas de  $y = \operatorname{arccosh} x$  y de  $y = \operatorname{arcsenh} x$ .

**Ejercicio 6.** (Euler 2-SM, página 337) Halla todas las funciones derivables  $y = f(x)$  tales que la tangente en cada punto  $(x, y)$  de la gráfica de la función corte a los ejes coordenados en los puntos  $M$  y  $N$  tales que  $(x, y)$  es el punto medio de  $M$  y  $N$ .

## MÉTODO DE NEWTON PARA RESOLVER $f(x) = 0$

Supongamos que  $f$  es una función derivable. Comenzando con un valor  $x_0 \in \mathbb{R}$ , se forma la sucesión  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$  mediante la fórmula de recurrencia

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},$$

siempre que  $f'(x_n) \neq 0$ . Si la sucesión  $\{x_n\}$  tiene límite  $\alpha$  y  $f'(\alpha) \neq 0$ , el número real  $\alpha$  es una solución de la ecuación  $f(x) = 0$ .

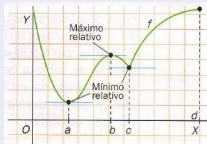
**Ejercicio 7.** Hallar una solución aproximada de  $x^6 - x - 1 = 0$  comenzando con  $x_0 = 1,5$  y calculando los seis primeros términos de la sucesión de los iterados según el método de Newton (usar  $x_n - x_{n-1}$  como medida del error).



## 5.1.2. Máximos y mínimos locales. Puntos de inflexión

### MÁXIMOS Y MÍNIMOS LOCALES

Una función  $f$  tiene un **máximo (mínimo) local** en  $x = p$  si en algún intervalo alrededor de  $p$  de la forma  $I = (p - \delta, p + \delta)$  se tiene  $f(p) \geq f(x)$  ( $f(p) \leq f(x)$ ) para todo  $x$  del intervalo  $I$ .

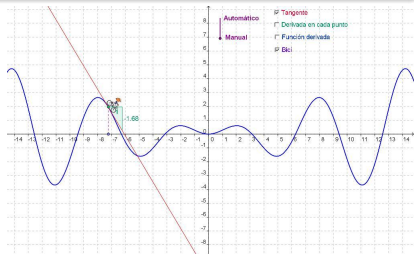
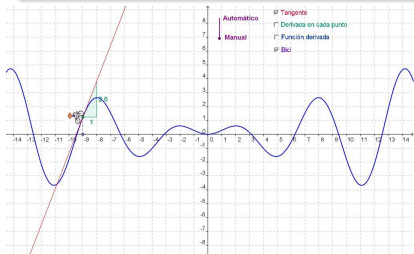


Si  $f$  tiene un máximo o mínimo local (llamados también **extremos locales**) en  $x = p$  y es derivable en este punto, debe tener  $f'(p) = 0$ .

**NOTA:** Los puntos en los que  $f'(p) = 0$  se llaman **puntos críticos** de  $f$ . Los extremos relativos de una función derivable son puntos críticos, pero no todos los puntos críticos son extremos relativos (¿Ejemplo?)

## CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

- ★ Si  $f'(x) > 0$  para todo  $x \in (a, b)$ ,  $f$  es creciente en  $[a, b]$ .
- ★ Si  $f'(x) < 0$  para todo  $x \in (a, b)$ ,  $f$  es decreciente en  $[a, b]$ .



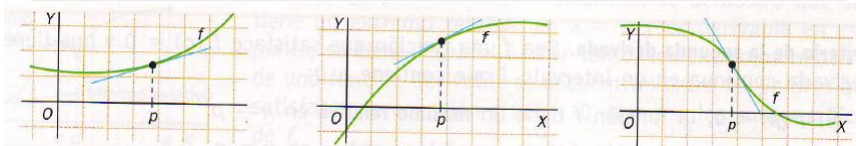
## EXTREMOS LOCALES Y DERIVADA SEGUNDA

Sea  $f$  una función que satisface  $f'(p) = 0$  y que tiene segunda derivada continua en un intervalo  $I$  que contiene a  $p$ .

- ★ Si  $f''(p) < 0$  la función  $f$  tiene un máximo local en  $x = p$ .
- ★ Si  $f''(p) > 0$  la función  $f$  tiene un mínimo local en  $x = p$ .

## CONVEXIDAD Y CONCAVIDAD

Una función  $f$  derivable en  $p$  es **convexa hacia arriba (convexa hacia abajo)** en  $p$  si en algún intervalo  $I$  que contiene a  $p$  la gráfica de  $f$  está por encima (debajo) de la recta tangente a  $f$  en el punto  $(p, f(p))$ .



- ★ Si  $f''(x) > 0$  en un intervalo  $I$  la función  $f$  es convexa en  $I$ .
- ★ Si  $f''(x) < 0$  en un intervalo  $I$  la función  $f$  es cóncava en  $I$ .

D./ El error de la aproximación lineal de  $f$  cerca de  $p$  es

$$f(x) - [f(p) + f'(p)(x - p)] = \frac{1}{2}f''(\alpha)(x - p)^2.$$

con  $\alpha$  entre  $x$  y  $p$ . ■

## PUNTOS DE INFLEXIÓN

En un punto de inflexión  $p$  la gráfica de una función pasa de ser convexa a cóncava o de cóncava a convexa. Si  $f$  es una función con dos derivadas en un intervalo que contiene a  $p$  se ha de tener  $f''(p) = 0$ .

**NOTA:** Para decidir si una función tiene en  $p$  un punto de inflexión no basta con saber que  $f''(p) = 0$  (¿Ejemplo?). Es necesario estudiar la convexidad y la concavidad en un intervalo que contenga a  $p$ .

**Ejercicio 8.** (Oposiciones 2010, Madrid, Problema 4). Sea  $f$  una función de variable real,  $f \in C^3(\mathbb{R})$ , tal que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + x + \frac{f(x)}{x} \right)^{1/x} = e^3.$$

Calcule razonadamente  $f(0)$ ,  $f'(0)$  y  $f''(0)$ .