

3. ÁLGEBRA LINEAL // 3.2. GEOMETRÍA ANALÍTICA EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO.

Eugenio Hernández

COMPLEMENTOS PARA LA FORMACIÓN DISCIPLINAR
EN MATEMÁTICAS

3.2.1. Rectas en el plano y en el espacio

La recta que pasa por el punto $P = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ y tiene a $\vec{v} = (v_1, v_2)$ como vector director tiene por **ecuación paramétrica** $(x, y) = (p_1, p_2) + t(v_1, v_2)$, $t \in \mathbb{R}$.

Al eliminar t en las ecuaciones paramétricas de una recta en el plano se obtiene una expresión del tipo $ax + by + c = 0$ que se llama **ecuación cartesiana** de la recta.

Dos rectas en el plano pueden **cortarse**, **ser paralelas** o **coincidentes**.

¿Cómo se distingue cada caso?

Ejercicio 1. Describir las ecuaciones paramétricas y cartesianas de la recta que pasa por el punto $P = (2, 1)$ y tiene a $\vec{v} = (1, 5)$ como vector director.

Ejercicio 2. Determinar la posición relativa de las rectas:

$$r_1 : 2x + y = 2 \quad y \quad r_2 : 3x - y = -7$$

Demuestra que $\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ **es la ecuación de una recta en el plano que pasa por los puntos** $A = (a_1, a_2)$ **y** $B = (b_1, b_2)$.

La recta que pasa por el punto $P = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ y tiene a $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ como vector director tiene por **ecuación paramétrica** $(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + t(v_1, v_2, v_3)$, $t \in \mathbb{R}$.

Al eliminar t en las ecuaciones paramétricas de una recta en el espacio se obtiene dos expresiones del tipo

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

que son su **ecuación cartesiana**.

Dos rectas en el espacio pueden **cortarse**, **cruzarse**, **ser paralelas** o **coincidentes**.

¿Cómo se distingue cada caso?

Ejercicio 3. Determinar la posición relativa de las rectas:

$$r_1 : (x, y, z) = (1, 0, 1) + t(-1, 1, 0)$$

$$r_2 : (x, y, z) = (0, 1, 2) + s(2, 0, 1)$$

Ejercicio 4. Determinar la posición relativa de las rectas:

$$r_1 : \left\{ \begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ 3y - z + 5 = 0 \end{array} \right\} \quad y \quad r_2 : \left\{ \begin{array}{l} x - y + z = 4 \\ 2x - z = 0 \end{array} \right\}.$$

3.2.2. Planos en tres dimensiones

El plano que pasa por el punto $P = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ y está generado por los vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ tiene por **ecuación paramétrica**

$$(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + t(u_1, u_2, u_3) + s(v_1, v_2, v_3), t, s \in \mathbb{R}.$$

Para eliminar t y s observar que para cada (x, y, z) fijos, el

sistema $r_1 : \left\{ \begin{array}{l} x = p_1 + tu_1 + sv_1 \\ y = p_2 + tu_2 + sv_2 \\ z = p_3 + tu_3 + sv_3 \end{array} \right\}$ tiene solución única en

las variables t, s . Esto es posible si y solo si

$$2 = r \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & x - p_1 \\ u_2 & v_2 & y - p_2 \\ u_3 & v_3 & z - p_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x \\ u_2 & v_2 & y \\ u_3 & v_3 & z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & \rho_1 \\ u_2 & v_2 & \rho_2 \\ u_3 & v_3 & \rho_3 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el primer determinante por la tercera columna se obtiene una expresión de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$ que es la **ecuación cartesiana** del plano.

Dos planos en el espacio pueden **cortarse en una recta**, **ser paralelos** o **coincidentes**.

¿Cómo se distingue cada caso?

Ejercicio 5. Hallar la ecuación cartesiana del plano que pasa por el punto $P = (1, 1, 0)$ y tiene a $\vec{u} = (-1, 0, 2)$ y a $\vec{v} = (1, 3, 3)$ como vectores generadores.

Ejercicio 6. Hallar la posición relativa de los planos de ecuaciones $2x + 3y - z = 1$ y $-x - 2y + z = 0$.

Ejercicio 7. Hallar la ecuación del plano paralelo al de ecuación $x + y + z = 0$ que pasa por el punto $P = (1, 1, 1)$.

3.2.3. Producto escalar. Longitudes y ángulos.

PRODUCTO ESCALAR

Si $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ son dos vectores de \mathbb{R}^n , se define su **producto escalar** como $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR

- a) $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0$ y $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$.
- b) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$ (Simétrica)
- c) $\langle \lambda \vec{x}, \vec{y} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- d) $\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$ (Distributiva)

LONGITUD O NORMA DE UN VECTOR

La **longitud o norma** de un vector $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ es

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ

Si $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$.

COSENO

El **coseno** del ángulo que forman dos vectores no nulos $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ es $\cos \alpha = \cos \angle(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}$.

NOTA: Observar que la desigualdad de Cauchy-Schwarz implica $-1 \leq \cos \angle(\vec{x}, \vec{y}) \leq 1$.

ORTOGONALIDAD O PERPENDICULARIDAD

Dos vectores no nulos $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ son ortogonales o perpendiculares si $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$.

Ejercicio 8. Demostrar que si k vectores no nulos de \mathbb{R}^n son ortogonales entre sí, también son linealmente independientes.

DESIGUALDAD TRIANGULAR

Si $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.

NOTA: Si $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ son perpendiculares entre sí,

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2.$$

El concepto de ortogonalidad permite
calcular ecuaciones de rectas y planos

Ejercicio 9. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P = (1, -2)$ y tiene a $\vec{u} = (1, 3)$ como vector director.

Ejercicio 10. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P = (1, 3, -2)$ y es perpendicular al vector $\vec{u} = (2, -1, 4)$.

El vector $\vec{u} = (a, b, c)$ es perpendicular al plano de ecuación $ax + by + cz + d = 0$ en \mathbb{R}^3 .

3.2.4. Proyecciones y distancias.

PROYECCIÓN DE UN PUNTO SOBRE UNA RECTA EN \mathbb{R}^n .

La **proyección** de un punto Q sobre una recta $r : P + t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$, en \mathbb{R}^n , es un punto $Q' \in r$ tal que $\overrightarrow{QQ'} \perp \vec{v}$. Entonces, $Q' = P + t'\vec{v}$ y además:

$$0 = \langle \overrightarrow{QQ'}, \vec{v} \rangle = \langle \overrightarrow{QP} + t'\vec{v}, \vec{v} \rangle = \langle \overrightarrow{QP}, \vec{v} \rangle + t' \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle .$$

Despejando t' obtenemos, $Q' = P - \frac{\langle \overrightarrow{QP}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}$.

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA EN \mathbb{R}^n .

Una vez calculada la proyección del punto Q sobre la recta r en \mathbb{R}^n , la **distancia** de Q a la recta r es $d(Q, r) = \|\overrightarrow{QQ'}\|$.

Ejercicio 11. Hallar la distancia del punto $Q = (1, 2, -1)$ a la recta r de ecuación $(x, y, z) = (1, 0, 1) + t(-1, 0, 2)$, $t \in \mathbb{R}$.

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA EN \mathbb{R}^2 .

Cuando el punto $Q = (q_1, q_2)$ y la recta r de ecuación $ax + by + c = 0$ están en \mathbb{R}^2 la distancia de Q a r puede calcularse con la fórmula

$$d(Q, r) = \frac{|aq_1 + bq_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO EN \mathbb{R}^3 .

Cuando el punto $Q = (q_1, q_2, q_3)$ y el plano π de ecuación $ax + by + cz + d = 0$ están en \mathbb{R}^3 la distancia de Q a r puede calcularse con la fórmula

$$d(Q, r) = \frac{|aq_1 + bq_2 + cq_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

3.2.5. Algunas áreas y volúmenes.

ÁREA DE UN PARALELOGRAMO EN \mathbb{R}^n

El área del paralelogramo generado por los vectores \vec{a} y \vec{b} en \mathbb{R}^n se puede calcular con la fórmula

$$\text{Área} = \sqrt{\begin{vmatrix} \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle & \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \\ \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle & \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle \end{vmatrix}} = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle)^2}$$

Ejercicio 12. Hallar el área del triángulo que tiene como vértices los puntos de intersección del plano de ecuación $2x + y + 3z = 6$ con los ejes coordenados.

La fórmula para el área de un paralelogramo se simplifica cuando los vectores que lo generan están en \mathbb{R}^2 .

ÁREA DE UN PARALELOGRAMO EN \mathbb{R}^2

El área del paralelogramo generado por los vectores $\vec{a} = (a_1, a_2)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2)$ en \mathbb{R}^2 se puede calcular con la fórmula

$$\text{Área} = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right|.$$

Para simplificar la fórmula del área de un paralelogramo en \mathbb{R}^3 necesitamos el producto vectorial.

PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES EN \mathbb{R}^3

El **producto vectorial** de los vectores $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ en \mathbb{R}^3 es otro vector cuyas coordenadas son

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

Prueba que el producto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$ es un vector perpendicular tanto a \vec{a} como a \vec{b} .

ÁREA DE UN PARALELOGRAMO EN \mathbb{R}^3

El área del paralelogramo generado por los vectores \vec{a} y \vec{b} en \mathbb{R}^3 es

$$\text{Área} = \|\vec{a} \times \vec{b}\|.$$

D/ Comprobar, con un cálculo sencillo, que

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle)^2. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 13. Comprueba que esta fórmula produce el mismo resultado que la usada en el ejercicio 12.

VOLUMEN DE UN PARALELEPÍPEDO EN \mathbb{R}^3

El volumen del paralelepípedo generado por los vectores $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ y $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ en \mathbb{R}^3 puede calcularse con la fórmula

$$\text{Volumen} = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \right|.$$

Ejercicio 14. Hallar la distancia entre las rectas de ecuaciones

$$r_1 : (x, y, z) = (1, 0, 1) + t(2, 0, 1)$$

$$r_2 : (x, y, z) = (0, 1, 1) + s(1, 3, -1)$$