Máster de Formación de profesorado de Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

Curso 2017-2018

COMPLEMENTOS DE MATEMÁTICAS PARA LA EDUCACIÓN SECUNDARIA

HOJA 7 DE EJERCICIOS: Análisis Matemático 1

(Para entregar el 21 de marzo de 2018.)

1. Determina las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 4x + 9$ que pasan por el origen de coordenadas.

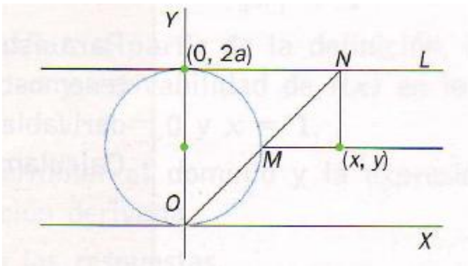
2. (a) Demuestra que la función $\operatorname{senh} x$ es inyectiva en $\mathbb{R}$ y su rango es todo $\mathbb{R}$. Su función inversa es el $\operatorname{arcsenh} x$. Dibuja la gráfica de esta función y demuestra que

$$\operatorname{arcsenh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})\,,\ x \in \mathbb{R}\,.$$

(b) Demuestra que la función $\tanh x$ es inyectiva en $\mathbb{R}$ y su rango es $(-1, 1)$. Su función inversa es el $\operatorname{arctanh} x$. Dibuja la gráfica de esta función y demuestra que

$$\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\ x \in (-1,1)\,.$$

3. Aquí tienes una curva que fue estudiada por María Gaetana Agnesi (1718-1799). A esta curva se le conoce con el nombre de *hechicera de Agnesi*.



i) Considera un circunferencia de centro $(0, a)$, con $a > 0$.

ii) Sea L la recta horizontal que pasa por $(0, 2a)$.

iii) Dibuja una recta que pasa por el origen y cualquier punto M de la circunferencia. Sea N el punto de intersección de esta recta con L.

iv) La *hechicera de Agnesi* es la curva cuyos puntos son la intersección de una recta horizontal que pasa por M y otra vertical por N.

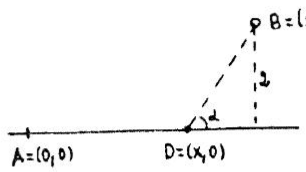
(a) Demuestra que la ecuación de la *hechicera de Agnesi* es

$$y = \frac{8a^3}{x^2+4a^2}\,.$$

b) Dibuja su gráfica

4. En el libro *Nueva geometría sólida de los barriles de vino*, J. Kepler escribió: *"De todos los cilindros con la misma diagonal, el que tiene más capacidad es aquel en que la razón del diámetro de la base y la altura es $\sqrt{2}$"*. ¿Puedes mostrar que la afirmación de Kepler es correcta? (Nota: Si D es el diámetro del cilindro, éste debe estar inscrito en una esfera de radio $R = D/2$)

5. Supongamos que una carretera recta es la orilla de un bosque. Por la carretera un ciclista puede viajar a 12 km/h y caminar por el bosque a 4 km/h. Desea ir desde el lugar A situado en la carretera hasta el lugar B situado en el bosque, con los datos que se indican en la figura adjunta. Demostrar que la mejor estrategia para hacer el recorrido en el menor tiempo posible es que abandone la carretera en un lugar D de manera que $\cos\alpha = 1/3$.

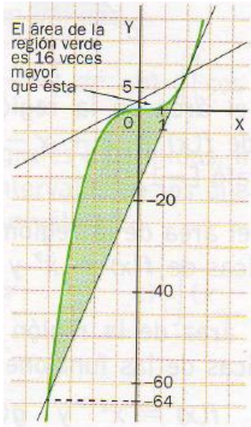


6. Sea C la gráfica de la función $f(x) = x^3$ y $P = (x_0, x_0^3)$ un punto de C con $x_0 < 0$. La recta tangente a C por el punto P corta a C en otro punto Q.

   (a) Halla las coordenadas de Q

   (b) La recta tangente a C por el punto Q corta a C en otro punto R. Halla las coordenadas del punto R. (Te puede servir el trabajo realizado en el apartado (a))

   (c) Demuestra que el área entre C y la recta tangente a C por el punto Q es 16 veces el área entre C y la recta tangente por P.

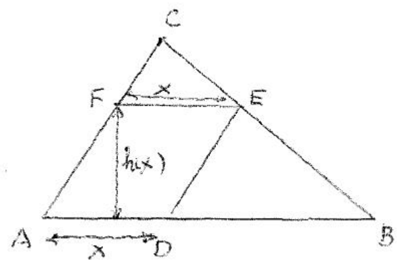


7. Con centro en cada uno de los vértices de un cuadrado de lado 1 se traza un cuarto de circunferencia como se indica en la figura.

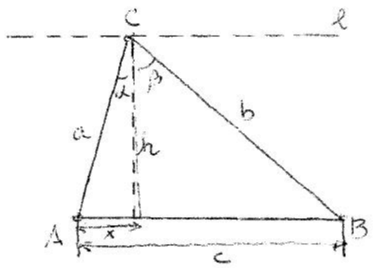
   (a) Halla el área de la región sombreada de la figura.

   (b) Halla la longitud del perímetro de la región sombreada de la figura.

8. Demostrar que el valor máximo que puede tener el área de un paralelogramo $ADEF$ inscrito en un triángulo acutángulo ABC de área 1, con EF paralelo a AB y DE paralelo a AC es 1/2.



9. De entre todos los triángulos de área dada A y uno de cuyos lados, c, es fijo, demostrar que aquél cuya suma de los otros dos lados es menor debe ser isósceles. Dar una solución geométrica (similar a la resolución del problema de Herón) y otra analítica (puedes usar la fórmula de Herón para escribir el área del triángulo).



10. De todos los triángulos rectángulos con hipotenusa de longitud dada ¿cuál tiene área máxima? ¿Cuál tiene perímetro máximo?