

HOJA 4 DE EJERCICIOS: Álgebra Lineal 2.

(Para entregar el 16 de febrero de 2018.)

1. Considérese la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ . Diagonalizar la matriz  $A$  y calcular  $A^n$ .
2. Hallar los autovalores de la matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ . Hallar tres autovectores de  $A$  que sean linealmente independientes.
3. Las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$  no pueden diagonalizarse. Sin embargo no es difícil calcular  $A^{100}$  y  $B^{100}$ . ¿Sabrías hacerlo?
4. Una población de aves se encuentra repartida entre dos humedales  $A$  y  $B$ . Se sabe que cada día un 70% de aves del humedal  $A$  se traslada a  $B$  mientras que un 50% de aves de  $B$  lo hace a  $A$ .
  - a) Describir en forma matricial la evolución de cada día al siguiente.
  - b) Si inicialmente había 120 aves en cada humedal ¿qué evolución seguirá el sistema a largo plazo?
5. La población de cierta especie de animales en un bosque está dividida en dos grupos de edad (jóvenes y adultos). La correspondiente matriz de Leslie es:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ .
  - a) Interpreta el significado de cada uno de los elementos de la matriz anterior.
  - b) Calcula el autovalor dominante de  $A$  y un autovector asociado.
  - c) ¿Cuál es la población de individuos en cada grupo con respecto al total con el paso del tiempo?
6. Supongamos que  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix}$  es la matriz de transición de una población de venados hembras, dividida para su estudio en jóvenes y adultas.
  - a) Demuestra que, a la larga, la población crecerá por un factor aproximado de 1.27.
  - b) Los granjeros y otras personas del área no quieren que la población crezca. Pueden controlarla permitiendo la caza de venados adultos. Si  $h$  es la proporción de adultos cazados en cada período, ¿cuál será ahora la matriz de transición?
  - c) Prueba que  $h = 0.6$  es una caza demasiado intensiva, es decir, la población de venados se extinguiría.
  - d) Es posible seleccionar  $h$  de manera que la población de venados no crezca ni desaparezca. ¿Cuál sería ese valor de  $h$ ?
7. (**Alquiler de coches.**) Una compañía de alquiler de coches tiene 3 sedes  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Se observa que de los clientes que alquilan el coche en  $A$  sólo el 80% lo devuelve de nuevo a  $A$ , mientras que un 10% lo devuelve en  $B$  y el otro 10% en  $C$ . De entre quienes alquilan el vehículo en  $B$ , 30% lo devolverá en  $A$ , 20% en  $B$  y 50% en  $C$ . Por último, de los que alquilan en  $C$ , 20% lo devuelve en  $A$ , 60% en  $B$  y 20% en  $C$ . ¿Qué proporción de vehículos quedará en cada sede con el paso del tiempo?