Geometría Afín V:
Aplicaciones afines.

1. Calcula las ecuaciones de la aplicación afín $T\colon \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ que cumple $T(1,1) = (2,3)$, $T(3,2) = (3,8)$ y $T(2,3) = (1,7)$, si existe.

2. Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín y $h : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ una homotecia de centro $C \in \mathbb{A}$ y razón λ. Demuestra que si $\lambda \neq 1$ entonces C es el único punto fijo de h. ¿Qué ocurre si $\lambda = 1$?

3. Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín de dimensión n y $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ una aplicación afín. Demostrar que si f tiene $n+1$ puntos fijos afínmente independientes, entonces f es la identidad.

4. Sea $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$ una aplicación afín. Demostrar:

a) f es inyectiva si y sólo si $\overrightarrow{f}$ es inyectiva.

b) f es sobreyectiva si y sólo si $\overrightarrow{f}$ es sobreyectiva.

c) Si f es biyectiva entonces f^{-1} es aplicación afín y $\overrightarrow{f^{-1}} = (\overrightarrow{f})^{-1}$.

5. Sea $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$ una aplicación entre espacios afines de dimensión finita. Sea $\mathcal{R}_b = \{A_0, \ldots, A_n\}$ (resp. $\mathcal{R}'_b = \{A'_0, \ldots, A'_m\}$) un sistema de referencia baricéntrico de $\mathbb{A}$ (resp. de $\mathbb{A}'$). Si $f(A_i) = (\alpha_{0i}, \ldots, \alpha_{0n})_{\mathcal{R}'_b}$. Definimos la matriz de f con respecto a $\mathcal{R}_b$ y $\mathcal{R}'_b$ como:

$$M_{\mathcal{R}_b\mathcal{R}'_b}(f) = (\alpha_{ij}), \quad i = 0, \ldots, m; j = 0, \ldots, n.$$

Demostrar que la aplicación afín f queda determinada por la matriz $M_{\mathcal{R}_b\mathcal{R}'_b}(f)$.

6. En $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, consideramos los puntos

$$A_1 = (1,1,0),\ A_2 = (2,0,2),\ A_3 = (1,2,\alpha),\ A_4 = (3,4,-1),$$

$$B_1 = (2,1,0),\ B_2 = (2,2,1),\ B_3 = (1,1,0),\ B_4 = (3,0,0),$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Halla los valores de α para los que existe una aplicación afín $f\colon \mathbb{A}^3(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ tal que $f(A_i) = B_i$, $i = 1,2,3,4$.

b) Demuestra que $\mathcal{R}_1 = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ y $\mathcal{R}_2 = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ son sistemas de referencia baricéntricos de $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$.

c) Calcula la matriz con respecto $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ de la aplicación afín f.

7. Sea $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ una aplicación afín. Se dice que una variedad lineal $L \subset \mathbb{A}$ es invariante por f si para todo $Q \in L$ se tiene que $f(Q) \in L$.

a) Demuestra que si L es invariante por f entonces $\overrightarrow{L}$ es un subespacio invariante por $\overrightarrow{f}$;

b) Ilustra mediante, un ejemplo, que el recíproco del apartado anterior no tiene por qué ser cierto.

8. Sea $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ una aplicación afín y sea $L(f) \subset \mathbb{A}$ el conjunto de puntos fijos por f. Demostrar que si $L(f) \neq \emptyset$ entonces $L(f)$ es un subespacio afín y $\overrightarrow{L(f)} = L(\overrightarrow{f})$, donde $L(\overrightarrow{f}) \subset \overrightarrow{\mathbb{A}}$ denota el subespacio vectorial de los vectores fijos por $\overrightarrow{f}$.

9. Sea $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ una aplicación afín tal que $\overrightarrow{f}$ tiene 1 como autovalor. Demuestra, mediante un ejemplo, que esa condición no es suficiente para que f tenga puntos fijos.

10. Considera los puntos de $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ siguientes:

$$\begin{array}{llll} A_0 = (1,1,1), & A_1 = (2,1,1), & A_2 = (1,2,1), & A_3 = (1,1,2). \\ B_0 = (2,3,1), & B_1 = (3,1,2), & B_2 = (1,5,2), & B_3 = (1,4,3). \end{array}$$

a) Demostrar que A_0, A_1, A_2, A_3 son afínmente independientes.

b) Calcula la matriz con respecto al sistema de referencia canónico de $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ de la única aplicación afín $f : \mathbb{A}^3(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ que queda definida por las imagenes $f(A_i) = B_i$, $i = 0, 1, 2, 3$.

c) Calcula los puntos fijos de f.

d) Calculas las rectas y planos invariantes por f.

e) Calcula la matriz con respecto al sistema de referencia baricéntrico $\mathcal{R}_b = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ de la aplicación afín f.

f) ¿Qué relación hay entre las matrices del apartado (b) y (e)?

11. Calcula las ecuaciones, si existe, de la homotecia $f\colon \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ en los siguientes casos:

a) $f(1,1) = (-3,0)$ y $f(-1,0) = (-1,1)$. **b)** $f(1,1) = (4,2)$ y $f(-1,0) = (-2,-1)$

12. Consideramos las rectas en $\mathbb{R}^2$: $r_1 : x + 2y - 4 = 0$ y $r_2 : x = 2y$. Calcular la expresión analítica con respecto al sistema referencia canónico de $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ de:

a) la simetría sobre r_1 en la dirección de r_2.

b) la proyección sobre r_1 en la dirección de r_2.

13. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación definida por $f(x,y) = \frac{1}{5}(3x - 4y + 8, -4x - 3y + 16)$.

a) Calcular la matriz de f con respecto al sistema referencia canónico de $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$.

b) Demostrar que f es una simetría y calcular los elementos geométricos que la determinan.

14. Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín y $h : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ una homotecia de centro $C \in \mathbb{A}$ y razón λ. Demuestra que si $\lambda \neq 1$ entonces C es el único punto fijo de h. ¿Qué ocurre si $\lambda = 1$?

15. Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín y $A_0, \ldots, A_k \in \mathbb{A}$. Diremos que X es *combinación afín* de $A_0, \ldots, A_k$ si existen $\lambda_0, \ldots, \lambda_k$ y $P \in \mathbb{A}$ tal que

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PX} = \lambda_0 \overrightarrow{PA_0} + \cdots \lambda_k \overrightarrow{PA_k} \\ \lambda_0 + \cdots \lambda_k = 1 \end{array}\right\}$$

En ese caso escribiremos $X = \lambda_0 A_0 + \cdots \lambda_k A_k$.
Sea $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$ una aplicación entre espacios afines. Demuestra que f es una aplicación afín si y sólo si transforma combinaciones afines en combinaciones afines. Es decir, para cada familia finita de puntos $A_0, \ldots, A_k \in \mathbb{A}$ y cada familia de escalares $\lambda_0, \ldots, \lambda_k$ tales que $\sum_{j=0}^{k} \lambda_j = 1$, se cumple:

$$f\Big(\sum_{j=0}^{k} \lambda_j A_j\Big) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j f(A_j).$$

16. Estudia las aplicaciones afines de $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ que transforman la hipérbola $xy = 1$ en si misma.

17. Sea $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$ una aplicación afín. Demostrar

a) Si $L \subset \mathbb{A}$ es una variedad lineal, entonces $f(L) \subset \mathbb{A}'$ es una variedad lineal tal que $\overrightarrow{f(L)} = \vec{f}(\vec{L})$. En particular $\dim f(L) = \text{rango}(\vec{f})$.

b) Si $M \subset \mathbb{A}'$ es una variedad lineal tal que $f^{-1}(M) \neq \emptyset$, entonces $f^{-1}(M) \subset \mathbb{A}$ es una variedad lineal tal que $\overrightarrow{f^{-1}(M)} = (\vec{f})^{-1}(\vec{M})$.

c) f transforma variedades lineales paralelas en variedades lineales paralelas. En particular f transforma puntos alineados en puntos alineados.