

Geometría Afín III:
Sistema de referencia baricéntrico.

1. Sean $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 2, 3)$, $C = (2, 3, 1)$ y $D = (3, 1, 2)$ cuatro puntos de $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ dados por sus coordenadas cartesianas respecto a un sistema de referencia \mathcal{R} .

- Demuestra que $\mathcal{R}' = \{A, B, C, D\}$ es un sistema de referencia baricéntrico.
- Calcula las coordenadas cartesianas respecto a \mathcal{R} del baricentro de A, B, C, D .
- Si $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, halla las coordenadas baricéntricas de O respecto a \mathcal{R}' .

2. Demuestra que en $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ los puntos medios de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo.

3. Sean O un punto y sean \vec{u} y \vec{v} dos vectores linealmente independientes. A todo escalar λ , se le asocian los puntos A y B tales que

$$\vec{OA} = \lambda \vec{u}, \quad \vec{OB} = \lambda \vec{v}.$$

Determina el baricentro de A y B en función de λ .

4. Halla las ecuaciones baricéntricas del plano que contiene a la recta

$$r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = z$$

y al punto $P = (-1, -2, 5)$ en $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$.

5. Sea \mathbb{A} un \mathbb{K} -espacio afín de dimensión n y $A_0, \dots, A_k \in \mathbb{A}$. Dado $X \in \mathbb{A}$, supongamos que existe $P \in \mathbb{A}$ y $\alpha_0, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ tales que

$$\left. \begin{aligned} \vec{PX} &= \alpha_0 \vec{PA}_0 + \alpha_1 \vec{PA}_1 + \dots + \alpha_k \vec{PA}_k \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_k &= 1. \end{aligned} \right\} (*)$$

Demostrar:

- La expresión (*) es válida, con los mismos coeficientes, cambiando P por cualquier $Q \in \mathbb{A}$.
 - Si $\{A_0, \dots, A_k\}$ son afinmente independientes, los valores $\alpha_0, \dots, \alpha_k$ son únicos.
6. Cambio de coordenadas baricéntricas a cartesianas: Sea \mathbb{A} un espacio afín de dimensión n , $\mathcal{R}_b = \{A_0, \dots, A_n\}$ un sistema de referencia baricéntrico de \mathbb{A} y $\mathcal{R} = \{O; \mathcal{B}\}$ un sistema de referencia cartesiano de \mathbb{A} . Supongamos que las coordenadas de los puntos A_i con respecto a \mathcal{R} son

$$A_i = (\alpha_{1i}, \dots, \alpha_{ni})_{\mathcal{R}}, \quad i = 0, \dots, n.$$

Entonces si $X = (\beta_0, \dots, \beta_n)_{\mathcal{R}_b}$, demostrar que se tiene

$$X = \left(\sum_{i=0}^n \beta_i \alpha_{1i}, \dots, \sum_{i=0}^n \beta_i \alpha_{ni} \right)_{\mathcal{R}},$$

es decir, si $X = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)_{\mathcal{R}}$ y denotemos por $C_{\mathcal{R}_b \mathcal{R}} = (\alpha_{ij})$, $i = 0, \dots, n, j = 1, \dots, n$ se tiene:

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = C_{\mathcal{R}_b \mathcal{R}} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

7. Sea \mathbb{A} un \mathbb{K} -espacio afín de dimensión n y $p_0, \dots, p_r \in \mathbb{A}$. Llamemos $(x_{kj})_{0 \leq j \leq n}$ a las coordenadas de cada punto p_k en un sistema de referencia baricéntrico \mathcal{R} . Sea la matriz $M = (x_{ij})$, $0 \leq j \leq n$, $0 \leq i \leq r$.

a) Sea $\mathcal{L}(\{p_0, p_1, \dots, p_r\})$ la mínima variedad lineal que contiene a los puntos p_0, p_1, \dots, p_r . Demostrar la siguiente igualdad

$$\dim(\mathcal{L}(\{p_0, p_1, \dots, p_r\})) + 1 = \text{rg}(M).$$

b) Supongamos $r = n$. Comprueba que, para que los $n+1$ puntos p_0, \dots, p_n sean afinmente independientes es necesario y suficiente que $\det(M) \neq 0$.

8. Cambio de coordenadas baricéntricas: Sea \mathbb{A} un espacio afín de dimensión n , $\mathcal{R}_b = \{A_0, \dots, A_n\}$ y $\mathcal{R}'_b = \{A'_0, \dots, A'_n\}$ dos sistemas de referencia baricéntricos de \mathbb{A} . Supongamos que las coordenadas de los puntos A'_i con respecto a \mathcal{R}_b son

$$A'_i = (\alpha_{0i}, \dots, \alpha_{ni})_{\mathcal{R}_b}, \quad i = 0, \dots, n.$$

Sea $C_{\mathcal{R}'_b \mathcal{R}_b} = (\alpha_{ij})$, $i = 0, \dots, n$, $j = 0, \dots, n$. Entonces si $X = (\beta_0, \dots, \beta_n)_{\mathcal{R}'_b}$, demostrar que se tiene

$$X = \left(\sum_{i=0}^n \beta_i \alpha_{0i}, \dots, \sum_{i=0}^n \beta_i \alpha_{ni} \right)_{\mathcal{R}_b},$$

es decir, si $X = (\gamma_0, \dots, \gamma_n)_{\mathcal{R}_b}$ se tiene:

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = C_{\mathcal{R}'_b \mathcal{R}_b} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

9. En $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, considera los puntos P_0, P_1, P_2, Q_0, Q_1 y Q_2 , cuyas coordenadas cartesianas en el sistema de referencia cartesiano $\mathcal{R}_C = \{P_0; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ son las siguientes:

$$\begin{aligned} P_0 &= (0, 0), & P_1 &= (1, 7), & P_2 &= (1, 1) \\ Q_0 &= (-1, 1), & Q_1 &= (1, 4), & Q_2 &= (3, 0) \end{aligned}$$

a) Demuestra que los puntos de $\mathcal{R}' = \{P_0, P_1, P_2\}$ son afinmente independientes. Demuestra que los puntos de $\mathcal{R}'' = \{Q_0, Q_1, Q_2\}$ son afinmente independientes.

b) Halla las coordenadas baricéntricas de P_0, P_1 y P_2 respecto a \mathcal{R}'' y las de Q_0, Q_1 y Q_2 respecto a \mathcal{R}' .

Considera los sistemas de referencia cartesianos $\mathcal{R}'_C = \{P_0; \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}\}$ y $\mathcal{R}''_C = \{Q_0; \overrightarrow{Q_0Q_1}, \overrightarrow{Q_0Q_2}\}$.

c) Calcula las coordenadas cartesianas de Q_0, Q_1 y Q_2 respecto a \mathcal{R}'_C y las de P_0, P_1 y P_2 respecto a \mathcal{R}''_C .

d) Describe las ecuaciones generales de cambio de coordenadas cartesianas entre \mathcal{R}'_C y \mathcal{R}''_C .

e) Describe las ecuaciones generales de cambio de coordenadas baricéntricas entre \mathcal{R}' y \mathcal{R}'' .