

Geometría Afín II:

Posición relativa de variedades lineales. Operaciones con variedades lineales.

1. Considera el siguiente par de rectas del espacio afín $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$:

$$r = (1, 0, 1) + \langle (1, \alpha, 0) \rangle, \quad y \quad s = (1, 1, 2) + \langle (1, 1, \beta) \rangle.$$

a) Estudia la posición relativa r y s dependiendo de los valores de α y β .

b) Describe la variedad lineal $r + s$ dependiendo de los valores de α y β .

2. En $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, considera los conjuntos

$$L = \{(x, y, z) : x + 2y - z = 1\} \quad y \quad M = \{(x, y, z) : x - y + 2z = 2 \text{ y } x - z = 1\}.$$

a) Demuestra que L y M son variedades lineales.

b) Determina si L y M se cortan, son paralelas, o se cruzan. Si se cortan, halla su intersección.

3. En $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$, considera los conjuntos

$$L_1 = \{(x, y, z, w) : x = 1, y = 2\} \quad y \quad L_2 = \{(x, y, z, w) : z = -2, w = 3\}.$$

a) Demuestra que L_1 y L_2 son variedades lineales.

b) Determina si L_1 y L_2 se cortan, son paralelas, o se cruzan. Si se cortan, halla su intersección.

4. En el espacio afín $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ estudia la posición relativa de las variedades lineales

$$L_1 = (1, 0, 0) + \langle (0, 2, 1) \rangle, \quad y \quad L_2 = \{(x, y, z) : x + 2y + z = 1\}.$$

Describe las variedades lineales intersección y suma.

5. Considera la familia de planos $2\lambda x + (\lambda + 1)y - 3(\lambda - 1)z + 2\lambda - 4 = 0$ en $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$.

a) Demuestra que estos planos tienen una recta en común.

b) Determina los planos de la familia que pasan por el punto $(1, -1, 2)$.

c) Determina los planos de esta familia que son paralelos a la recta:

$$L = \{x + 3z - 1 = 0, y - 5z + 2 = 0\}.$$

6. Encuentra la recta que corta a las rectas

$$s = \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2y + 3z + 4 = 0 \end{cases} \quad y \quad t = \begin{cases} x + y + 3z - 1 = 0 \\ x + 2z - 5 = 0 \end{cases},$$

y pasa por $P = (1, 6, -3)$.

7. Consideremos las rectas $L_1 = \{x + y + z = x + 2y = 0\}$, $L_2 = \{2x + 2y + z = 3, x + y = 2\}$ y $L_3 = \{3x + 2y + 2z = 2, 2x + y + z = 0\}$ del espacio afín $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$.

a) Demuestra que se cruzan dos a dos.

b) ¿Existe algún plano π paralelo a las tres rectas?

8. Decide, de manera razonada, si los siguientes resultados son verdaderos o falsos:

a) Dos rectas paralelas en $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ o bien son coincidentes, o bien no se cortan.

b) Dos rectas en $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ que no se cortan deben ser paralelas.

c) En $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ con $n \geq 3$ dos rectas que no se cortan no tienen por qué ser paralelas.

9. Sea \mathbb{A} un espacio afín de dimensión n y $L_1, L_2 \subset \mathbb{A}$ subespacios afines. Demuestra que si la dimensión de L_1 es $n - 1$ y la dimensión de $L_2 \geq 1$, entonces L_1 y L_2 no se pueden cruzar.

10. En el espacio afín $(\mathcal{A}, V, \varphi)$ de dimensión n , sean $L_1 = a_1 + V_1$ y $L_2 = a_2 + V_2$ dos subespacios afines. Demuestra que si $V = V_1 \oplus V_2$, entonces L_1 y L_2 se cortan en un punto.

11. Sea \mathbb{A} un espacio afín de dimensión n y $L, M \subset \mathbb{A}$ dos variedades lineales tal que $L + M = \mathbb{A}$, $L, M \neq \mathbb{A}$, y supongamos que las dimensiones de L y M son las mínimas posibles con estas propiedades. Describe las dimensiones de L y M así como su posición relativa en el caso de $n = 2, 3$ y 4 . Conjetura un resultado para n arbitrario. Intenta demostrarlo.

12. Sea \mathbb{A} un espacio afín de dimensión n y $L, M \subset \mathbb{A}$ dos hiperplanos que no son paralelos. Calcula la dimensión de $L \cap M$.