Geometría Afín I:
Espacio afín. Subespacios afines. Sistema de referencia cartesiana. Ecuaciones

1. Sea $(\mathcal{A}, V, \varphi)$ un espacio afín, y sea (L, W, φ) un subespacio afín (o variedad lineal), es decir, $L = p_0 + W$, donde p_0 es un punto en $\mathcal{A}$.

a) Demuestra que si $p, q \in L$, entonces $\varphi(p, q) \in W$ (con lo cual la aplicación $\varphi : L \times L \to W$ está bien definida).

b) Demuestra que (L, W, φ) es un espacio afín en sí mismo, es decir, satisface los dos axiomas de la definición de espacio afín.

2. Sea (A, V, φ) un espacio afín. Dado un vector $\overrightarrow{v} \in V$ y cuatro puntos p, q, r, s tales que $r = p + \overrightarrow{v}$ y $s = q + \overrightarrow{v}$, demuestra que $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{rs}$.

3. Sea S el conjunto de puntos (x, y, z) de $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ que satisfacen la condición $2x + y - z = 3$. Demuestra, usando la definición, que S es un subespacio afín de $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$.

4. Demuestra que un subconjunto H del espacio afín $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ es una variedad lineal si y sólo si *para todo par de puntos de H la recta que los une está contenida en H.*

5. Sea $T = \cup_{n\in\mathbb{N}}\{x + y = n\}$. Decide, de manera razonada, si el conjunto T es una subvariedad lineal de $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$.

6. Sea $\mathcal{R} = \{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ un sistema de referencia cartesiano en el espacio afín $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ respecto del cual el punto p tiene coordenadas $(0, -1)$. Construye otro sistema de referencia en $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ respecto del cual el punto p tenga como coordenadas $(-1, 0)$.

7. Sean P, Q y R tres puntos de $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ tales que $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son linealmente independientes.

a) Prueba que los vectores $\overrightarrow{RP}$ y $\overrightarrow{RQ}$ son linealmente independientes.
Considera las referencias cartesianas $\mathcal{R} = \{P; \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}\}$ y $\mathcal{R}' = \{R; \overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RQ}\}$.

b) Escribe las coordenadas cartesianas de P, Q y R respecto a $\mathcal{R}$.

c) Escribe las coordenadas cartesianas de P, Q y R respecto a $\mathcal{R}'$.

d) Halla las ecuaciones de cambio de coordenadas entre las dos referencias.

e) Decide, de manera razonada, si existe algún punto en $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ con las mismas coordenadas respecto a los dos sistemas de referencia.

8. Determina unas ecuaciones implícitas de las subespacios afines $L_t = p_t + V$ de $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$, donde $p_t = (1, -2, 3, t)$ y $V = \mathfrak{L}\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ con $\overrightarrow{u_1} = (1, 1, 0, 0)$, $\overrightarrow{u_2} = (0, 0, 1, 1)$ y $\overrightarrow{u_3} = (1, 2, -1, 0)$ en un sistema de referencia fijado. ¿Para qué valor de t la variedad L_t pasa por el origen?

9. Halla unas ecuaciones implícitas de la variedad lineal L de $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ generada por los puntos $p_1 = (1, 0, 0, 1)$, $p_2 = (0, 1, 0, 1)$ y $p_3 = (0, 0, 1, 1)$, cuyas coordenadas están dadas con respecto a un sistema de referencia fijado. ¿Cuál es la dimension de L?

10. Halla unas ecuaciones implícitas del subespacio afín de $\mathbb{A}^5(\mathbb{R})$ generado por los puntos $P_1 = (-1, 2, -1, 0, 4)$, $P_2 = (0, -1, 3, 5, 1)$, $P_3 = (4, -2, 0, 0, -3)$ y $P_4 = (3, -1, 2, 5, 2)$.

11. En $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ y con respecto de una referencia dada $\mathcal{R}$, se dan los puntos $A = (1,1)$, $B = (-2,0)$, los vectores $\overrightarrow{u_1} = (1,2)$ y $\overrightarrow{u_2} = (-1,1)$ y el subespacio afín L de ecuaciones $x_1 - x_2 = 1$.

a) Halla las coordenadas de B respecto al sistema de referencia $\mathcal{R}' = \{A; \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$.

b) Halla una ecuación implícita de L con respecto a $\mathcal{R}'$.

12. Sea $\mathcal{R}'$ un sistema de referencia en el plano $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ que se obtiene girando un ángulo α en sentido positivo los vectores de un sistema de referencia canónico $\mathcal{R}$. Si C es la circunferencia cuyos puntos $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ satisfacen $(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 4$ en el sistema de referencia $\mathcal{R}$, halla las ecuaciones de C en el sistema de referencia $\mathcal{R}'$. ¿Cuáles son las coordenadas del centro de la circunferencia respecto de $\mathcal{R}'$?

13. En $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ se consideran las referencias cartesianas:

$$\mathcal{R} = \{O; \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\} \text{ y } \mathcal{R}' = \{O'; \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}.$$

Sean $O'_{\mathcal{R}} = (-1,6,2)$, $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{u_1} + 3\overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_3}$, $\overrightarrow{v_2} = -\overrightarrow{u_1}$ y $\overrightarrow{v_3} = 2\overrightarrow{u_1} + 5\overrightarrow{u_2} + 7\overrightarrow{u_3}$. Si un plano π tiene ecuación $2x - y + 3z = 0$ en $\mathcal{R}$, halla su ecuación respecto a $\mathcal{R}'$.